

Exo 1

Dr. Khelladi Samia

Rappel* Types d'erreursSoient $A \in \mathbb{R}$ et a une valeur approchée de A , on a :- d'erreur absolue : $\Delta_a = |A - a|$ ($\Rightarrow A = a \pm \Delta_a$)- d'erreur relative : $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|A|} = \frac{|A - a|}{|A|}$ En général A est inconnu, alors on utilise ε un majorant de Δ_a ($\Delta_a \leq \varepsilon$) et on prend $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ un majorant de δ_a (dans ce cas $\Delta_a \approx \varepsilon$ et $\delta_a \approx \delta$)* Chiffres significatifsSoit $a \in \mathbb{R}^+$ ($a > 0$), alors a peut être écrit sous forme décimale :

$$a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \dots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1} + \dots$$

où $\alpha_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ et $\alpha_m \neq 0$.Alors les chiffres α_i ($\forall i \leq m$) sont appelés chiffres significatifs de a .Exemples : $a = 75,03200$ tous les chiffres de a sont signifi.

$$a = 0,00573210-$$

Ch. Sign.

* Chiffres significatifs exactsOn a les n premiers chiffres significatifs de a sont exacts si $\Delta_a \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1}$ ($a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \dots$)- le n -ième chiffre de a avant la virgule est exact $\Leftrightarrow \Delta_a \leq \frac{1}{2} 10^{n-1}$ - le n -ième chiffre de a après la virgule est exact $\Leftrightarrow \Delta_a \leq \frac{1}{2} 10^{-n}$ - On a, si le nombre de chiffres exacts de a est n alors

$$\delta_a \leq \frac{1}{\alpha_m} 10^{1-n}$$

* Remarques- Si un chiffre sign dans a est exact alors tous les ch. situés avant ce chiffre sont exacts- Si un chiffre sign dans a n'est pas exact alors tous les chiffres situés après ce chiffre ne sont pas exacts

Exo 1: Déterminer le nombre de chiffres exacts de $a = \sqrt{22}$ pour que l'erreur relative δ_a ne dépasse pas 0,1 %
i.e. tq $\delta_a \leq 0,1\% = \frac{0,1}{100} = 10^{-3}$

On a $\sqrt{A} = \sqrt{22} \approx a = 4,69041576$.

$$= 4 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2} + 0 \times 10^{-3} + \dots$$

$$= \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \dots \quad / \quad \alpha_m = 4 \neq 0 \text{ et } m=0$$

On sait que si n est le nombre de chiffres exacts de a alors $\delta_a \leq \frac{1}{\alpha_m} 10^{1-n}$.

$$\text{On a } \delta_a \leq \frac{1}{\alpha_m} 10^{1-n} \leq 10^{-3}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} 10^{1-n} \leq 10^{-3} \Rightarrow 10^{1-n} \leq 4 \times 10^{-3} \quad (4 > 0)$$

$$\Rightarrow 10^{-n} \leq 4 \times 10^{-4} \quad (\cdot \times 10^{-1})$$

$$\Rightarrow 10^n \geq \frac{1}{4} 10^4 \quad (0 < a \leq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b})$$

$$\Rightarrow \ln(10^n) \geq \ln\left(\frac{1}{4} 10^4\right) \quad (\text{car } \ln \nearrow)$$

$$\Rightarrow n \ln 10 \geq \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln(10^4) = 4 \ln 10 - \ln 4$$

$$\Rightarrow n \geq 4 - \frac{\ln 4}{\ln 10} = 3,398 \quad \text{et } (n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \boxed{n \geq 4}$$

Donc le nombre nécessaire de chiffres exacts de a pour que $\delta_a \leq 10^{-3}$ est au moins 4 chiffres exacts.

Exo 2 Rappel:

* Soit $a = x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n x_{n+1} \dots x_{n+p}$ $|x_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ et $x_1 \neq 0$
 et soit $\bar{a}$ l'arrondi de a à n chiffres significatifs. Alors

$\bar{a} = x_1 x_2 \dots x_{n-1} \bar{x}_n$, où $\bar{x}_n$ est calculé comme suit:

- 1) Si $x_{n+1} < 5 \Rightarrow \bar{x}_n = x_n$
- 2) Si $x_{n+1} > 5 \Rightarrow \bar{x}_n = 1 + x_n$
- 3) Si $x_{n+1} = 5$
 - Si $\exists x_i \neq 0 \mid i > n+1 \Rightarrow \bar{x}_n = 1 + x_n$
 - Si $x_i = 0, \forall i > n+1$
 - Si x_n pair $\Rightarrow \bar{x}_n = x_n$
 - Si x_n impair $\Rightarrow \bar{x}_n = 1 + x_n$

* l'erreur d'arrondissement est $\Delta_a = |a - \bar{a}|$.

Arrondir les nombres suivants à n ($n \geq 1$) chiffres significatifs.

* $x_1 = 12,12399$, $x_n = 2$

On a $x_{n+1} = 3 < 5 \Rightarrow \bar{x}_n = x_n = 2 \Rightarrow \boxed{\bar{x}_1 = 12,12}$
 et $\Delta_{x_1} = |x_1 - \bar{x}_1| = 3,99 \times 10^{-3}$

* $x_2 = 32,346002$, $x_n = 4$

On a $x_{n+1} = 6 > 5 \Rightarrow \bar{x}_n = 1 + x_n = 5 \Rightarrow \boxed{\bar{x}_2 = 32,35}$ et $\Delta_{x_2} = |x_2 - \bar{x}_2| = \dots$

* $x_3 = 973,3504$, $x_n = 3$

On a $x_{n+1} = 5$ et $\exists x_7 = 4 \neq 0 (7 > 5) \Rightarrow \bar{x}_n = 1 + x_n = 4 \Rightarrow \boxed{\bar{x}_3 = 973,4}$ et $\Delta_{x_3} = |x_3 - \bar{x}_3| = \dots$

* $x_4 = 0,01204501$, $x_n = 4$ et $x_{n+1} = 5$ et $\exists x_7 = 1 \neq 0 (7 > 5)$,

$\Rightarrow \bar{x}_n = 1 + x_n = 5 \Rightarrow \boxed{\bar{x}_4 = 0,01205}$ et $\Delta_{x_4} = |x_4 - \bar{x}_4| = \dots$

* $x_5 = 173,7500$, $x_n = 7$

On a $x_{n+1} = 5$ et $x_i = 0 \forall i > n+1 = 5$. $x_n = 7$ impair $\Rightarrow \bar{x}_n = 1 + x_n = 8$.

$\Rightarrow \boxed{\bar{x}_5 = 173,8}$ et $\Delta_{x_5} = |x_5 - \bar{x}_5| = \dots$

* $x_6 = 0,00123650$, $x_n = 6$. On a $x_{n+1} = 5$ et $x_i = 0, \forall i > n+1 = 5$

et $x_n = 6$ pair $\Rightarrow \bar{x}_n = x_n = 6 \Rightarrow \boxed{\bar{x}_6 = 0,001236}$ et $\Delta_{x_6} = |x_6 - \bar{x}_6| = \dots$

* $x_7 = 173,0500$, $x_n = 0$. On a $x_{n+1} = 5$ et $x_i = 0, \forall i > n+1 = 5$,

et $x_n = 0$ pair $\Rightarrow \bar{x}_n = x_n = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{x}_7 = 173,0}$ et $\Delta_{x_7} = |x_7 - \bar{x}_7| = \dots$

Exo 3:Rappel* Formules générales des erreurs.Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

On a plusieurs cas

1) Δy inconnue et les Δx_i connues, alors:

$$\Delta y \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \right| \cdot \Delta x_i$$

et on prend $\Delta y \simeq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i$

2) Δy connue et les Δx_i inconnues, alors on utilise le principe d'égalité des effets:

$$\Delta y \simeq n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \right| \cdot \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \Delta x_i \simeq \frac{\Delta y}{n \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|}, \quad \forall i=1, 2, \dots, n.$$

3) Δy inconnue et les Δx_i (ou δx_i) inconnues, alors:

$$\Delta y \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln(f)}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \right| \cdot \Delta x_i$$

et on prend $\Delta y \simeq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln(f)}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i$

4) Δy connue et les Δx_i (ou δx_i) inconnues, alors on utilise le principe d'égalité des effets:

$$\Delta y \simeq n \left| \frac{\partial \ln(f)}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \right| \cdot \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x_i \simeq \frac{\Delta y}{n \left| \frac{\partial \ln(f)}{\partial x_i} \right|}, & \forall i=1 \rightarrow n. \\ \text{et} \\ \delta x_i = \frac{\Delta x_i}{|x_i|}, & i=1, \dots, n. \end{cases}$$

1) Montrons que:

$$\text{Si } a = \sum_{i=1}^n a_i \text{ alors } \Delta a \leq \sum_{i=1}^n \Delta a_i$$

$$\text{Soit: } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (a_1, \dots, a_n) \mapsto a = f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i$$

on a, d'après la formule générale de l'erreur absolue

$$\Delta a \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial a_i}(a_1, \dots, a_n) \right| \cdot \Delta a_i$$

on a : $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a_1}(a_1, \dots, a_n) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial a_2}(a_1, \dots, a_n) = 1 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial a_n}(a_1, \dots, a_n) = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial a_i}(a_1, \dots, a_n) = 1, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

on a : $\Delta a \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial a_i}(a_1, \dots, a_n) \right| \cdot \Delta a_i = \sum_{i=1}^n |1| \cdot \Delta a_i = \sum_{i=1}^n \Delta a_i$

Donc : si $a = \sum_{i=1}^n a_i$ alors $\Delta a \leq \sum_{i=1}^n \Delta a_i$

2) Montrons que :

Si $a = \prod_{i=1}^n a_i$ ($a_i \neq 0$), alors $\Delta a \leq \sum_{i=1}^n \Delta a_i$

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $(a_1, \dots, a_n) \mapsto a = f(a_1, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^n a_i = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$

on a d'après la formule générale de l'erreur relative

$$\Delta a \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln f}{\partial a_i}(a_1, \dots, a_n) \right| \cdot \Delta a_i$$

on a : $f(a_1, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^n a_i = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$ ($a_i \neq 0$)

$\Rightarrow \ln f(a_1, \dots, a_n) = \ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \ln f}{\partial a_1}(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{a_1} \\ \frac{\partial \ln f}{\partial a_2}(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ln f}{\partial a_n}(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{a_n} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \ln f}{\partial a_i} = \frac{1}{a_i} \quad / a_i \neq 0$$

on a $\Delta a \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln f}{\partial a_i}(a_1, \dots, a_n) \right| \cdot \Delta a_i = \sum_{i=1}^n \left| \frac{1}{a_i} \right| \cdot \Delta a_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta a_i}{|a_i|} \right) \Delta a_i$

Donc $\Delta a \leq \sum_{i=1}^n \Delta a_i$ si $a = \prod_{i=1}^n a_i$

Exo3 (suite)

3) Soient $a_1 = 3,1204$, $a_2 = 7,01$ et $a_3 = 38,10$.

Supposons que tous les chiffres des a_i sont exacts.
Combien de chiffres exacts possède $a = a_1 + a_2 + a_3$?

$$\text{On a: } a = a_1 + a_2 + a_3 = 3,1204 + 7,01 + 38,10 = 48,2304 \\ = 4 \times 10^1 + 8 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 0 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-4}$$

$$\text{i.e. } \alpha_m = 4 \neq 0 \text{ et } m = 1.$$

On a: a possède n chiffres exacts si $\Delta_a \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1}$ / $m=1$.

Calculons Δ_a ?

On a d'après la question 1): $a = a_1 + a_2 + a_3 \Rightarrow \Delta_a \leq \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \Delta_{a_3}$

$$\text{et on prend } \Delta_a \approx \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \Delta_{a_3} \quad m-n+1.$$

Calculons les Δ_{a_i} ? On prend $\Delta_{a_i} \approx \frac{1}{2} 10^{m-n+1}$

$$\text{* On a } a_1 = 3,1204 = 3 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + \dots \Rightarrow \begin{cases} \alpha_m = 3 \neq 0 \\ m = 0. \end{cases}$$

et $\lfloor n=5 \rfloor$ car tous les ch. de a_1 sont exacts.

$$\Rightarrow \Delta_{a_1} \approx \frac{1}{2} 10^{0-5+1} = \frac{1}{2} 10^{-4} \Rightarrow \boxed{\Delta_{a_1} \approx 5 \times 10^{-5}}$$

$$\text{* On a: } a_2 = 7,01 = 7 \times 10^0 + 0 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_m = 7 \neq 0 \\ m = 0. \end{cases}$$

et $\lfloor n=3 \rfloor$ car tous les ch. de a_2 sont exacts.

$$\Rightarrow \Delta_{a_2} \approx \frac{1}{2} 10^{0-3+1} = \frac{1}{2} 10^{-2} \Rightarrow \boxed{\Delta_{a_2} \approx 5 \times 10^{-3}}$$

$$\text{* On a: } a_3 = 38,10 = 3 \times 10^1 + 8 \times 10^0 + \dots \Rightarrow \begin{cases} \alpha_m = 3 \neq 0 \\ m = 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta_{a_3} \approx \frac{1}{2} 10^{1-4+1} = \frac{1}{2} 10^{-2} \Rightarrow \boxed{\Delta_{a_3} \approx 5 \times 10^{-3}} \text{ et } \lfloor n=4 \rfloor$$

$$\text{Donc: } \boxed{\Delta_a \approx \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \Delta_{a_3} = 1,005 \times 10^{-2}}$$

Maintenant on peut calculer le nombre des chiffres exacts de $a = 48,2304$ ($\alpha_m = 4$, $m=1$)

$$\text{On a: } \Delta a \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1} = \frac{1}{2} 10^{1-n+1} = 5 \times 10^{1-n}.$$

$$\Rightarrow 1,005 \times 10^{-2} \leq 5 \times 10^{1-n}.$$

$$\Rightarrow \frac{1,005}{5} \times 10^{-2} \leq 10^{1-n}$$

$$\Rightarrow 0,501 \times 10^{-3} \leq 10^{-n} \quad (\times 10^{-1})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0,501} \times 10^3 \geq 10^n.$$

$$\Rightarrow \ln(10^n) \leq \ln\left(\frac{1}{0,501}\right) + \ln(10^3)$$

$$\Rightarrow n \ln(10) \leq 3 \ln(10) - \ln(0,501)$$

$$\Rightarrow n \leq 3 - \frac{\ln(0,501)}{\ln(10)} = 3,3. \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \boxed{n \leq 3}$$

Alors, le nombre a possède au plus 3 chiffres exacts.

$$a = 48, \underline{2}304$$

Vérifions si le chiffre 2 est exact:

On a 2 est le premier chiffre après la virgule ($n=1$)

donc: (2 est exact) $\Rightarrow \Delta a \leq \frac{1}{2} 10^{-n}$ ($n=1$)

$$\text{On a: } \Delta a = 1,005 \times 10^{-2} \leq \frac{1}{2} 10^{-1} = 5 \times 10^{-2} \text{ (Vérifié)}$$

alors 2 est un chiffre exact de a , ce qui fait que tous les chif. avant 2 sont exacts.

Finalement, a possède (exactement) 3 ch. exacts.

Exo 3 (suite)

4) Soit $b = a_1 a_2 = 3,1204 \times 7,01 = 21,874004$
 $= 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0 \dots \Rightarrow \begin{cases} \alpha_m = 2 \neq 0 \\ m = 1 \end{cases}$

Combien de chiffres exacts possède b ?

On a: b possède n chiffres exacts si: $\Delta_b \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1} \Big|_{m=1}$

Calculons $\Delta_b = ?$

On a d'après la formule générale de l'erreur absolue

$$(\Delta y \leq \sum_{i=1}^k \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i \quad (y = f(x_1, \dots, x_k))$$

on $b = a_1 a_2 = f(a_1, a_2)$

$$\Rightarrow \Delta_b \leq \left| \frac{\partial f}{\partial a_1} \right| \cdot \Delta a_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial a_2} \right| \cdot \Delta a_2$$

$$\text{et on prend } \Delta_b \approx \left| \frac{\partial f}{\partial a_1} \right| \cdot \Delta a_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial a_2} \right| \cdot \Delta a_2$$

$$\text{On a } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a_1} = a_2 = 7,01 \\ \frac{\partial f}{\partial a_2} = a_1 = 3,1204 \end{cases}$$

On a aussi d'après la question précédente

$$\Delta a_1 \approx 5 \times 10^{-5} \text{ et } \Delta a_2 \approx 5 \times 10^{-3}$$

$$\text{Donc } \Delta_b \approx 7,01 \times 5 \times 10^{-5} + 3,1204 \times 5 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \Delta_b \approx 15,9525 \times 10^{-3} \approx 15,95 \times 10^{-3}$$

Maintenant, on peut calculer n le nbre de ch.-ex de b .

$$\Delta_b = 15,95 \times 10^{-3} \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1} = \frac{1}{2} 10^{1-n+1} = 5 \times 10^{1-n}$$

$$\Rightarrow \frac{15,95}{5} \cdot 10^{-3} \leq 10^{-n} \Rightarrow 10^{-n} \geq 3,19 \times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow 10^n \leq \frac{1}{3,19} 10^4 \Rightarrow \ln(10^n) \leq \ln\left(\frac{10^4}{3,19}\right)$$

$$\Rightarrow n \ln(10) \leq 4 \ln(10) - \ln(3,19)$$

$$\Rightarrow n \leq 3,5 \text{ et } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \boxed{n \leq 3}$$

Alors le nombre $b = \underline{21,87}4004$ admet au plus
3 chiffres exacts

Vérifions si 8 est exact.

On a 8 est le premier chiffre après la virgule ($n=1$)
donc: (8 est exact) (F) ($D_b \leq \frac{1}{2} 10^{-n} / n=1$)

$$\text{On a: } \frac{1}{2} 10^{-n} = \frac{1}{2} 10^{-1} = 5 \times 10^{-2} = 50 \times 10^{-3}$$

$$\text{et } D_b = 15,95 \times 10^{-3}.$$

On remarque que $D_b = 15,95 \times 10^{-3} \leq 50 \times 10^{-3}$

$\rightarrow$ 8 est exact de b

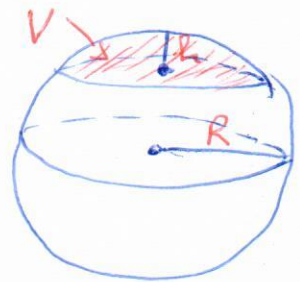
Alors, tous les chiffres avant 8 sont exacts.

Finalement, b admet 3 chiffres exacts.

Exo 4

On a $V = \frac{\pi h^2}{3} (3R - h)$

Si $R = 20 \text{ cm}$ et $h = 12 \text{ cm}$, quelle est l'incertitude nécessaire pour R et h (i.e. $\Delta R = ?$ et $\Delta h = ?$) tq $\Delta V = 0,1$.



On donne $\pi = 3,141 \pm 0,001$ (i.e. on considère que π est une variable et $\Delta \pi = 0,001$).

On a: $V = \frac{\pi h^2}{3} (3R - h) = \frac{3,141 \times 12^2}{3} (3 \times 20 - 12) = 7236,864 \text{ cm}^3$
 $= 7 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + \dots$ ($\alpha_m = 7 \neq 0$, $m = 4$)

On pose $V = f(\pi, h, R)$ (trois variables $\boxed{n=3}$)

On utilise le principe d'égalité des effets dans la formule générale de l'erreur absolue

$$(\Delta y \approx n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_1 \rightarrow x_n) \right|)$$

$$\Delta V \approx 3 \left| \frac{\partial f}{\partial h} \right| \Delta h = 3 \left| \frac{\partial f}{\partial R} \right| \Delta R$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta h = \frac{\Delta V}{3 \left| \frac{\partial f}{\partial h} \right|} \\ \Delta R = \frac{\Delta V}{3 \left| \frac{\partial f}{\partial R} \right|} \end{cases}$$

On a: $f(\pi, h, R) = \frac{\pi h^2}{3} (3R - h) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial R} = 2\pi h R - \pi h^2 = 1055,376 \\ \frac{\partial f}{\partial R} = \pi h^2 = 452,304 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta h = \frac{\Delta V}{3 \left| \frac{\partial f}{\partial h} \right|} = \frac{0,1}{3166,128} = 3,2 \times 10^{-5} \\ \Delta R = \frac{\Delta V}{3 \left| \frac{\partial f}{\partial R} \right|} = \frac{0,1}{1356,912} = 7,4 \times 10^{-5} \end{cases}$$

Donc, pour que $\Delta V = 0,1$ on doit prendre

$\boxed{\Delta h = 3,2 \times 10^{-5}}$ et $\boxed{\Delta R = 7,4 \times 10^{-5}}$

Exo 5

1) Montrer que si $y = x^n$ alors $\delta y = n \delta x$

On a $y = f(x) = x^n$

On utilise la formule générale de l'erreur relative
(lire $\delta y \approx \sum_{i=1}^p \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$ si $y = f(x_1 \rightarrow x_p)$.)

Comme on a une seule variable, alors

$$\delta y \approx \left| \frac{\partial \ln f(x)}{\partial x} \right| \cdot \Delta x = \left| \frac{\ln f(x)}{x} \right| \Delta x$$

On a $f(x) = x^n \Rightarrow \ln f(x) = \ln(x^n) = n \ln(x)$

$$\Rightarrow (\ln f)'(x) = (n \ln x)' = \frac{n}{x}$$

$$\Rightarrow \delta y \approx \left| \frac{n}{x} \right| \cdot \Delta x = n \cdot \left(\frac{\Delta x}{|x|} \right) \Rightarrow \boxed{\delta y \approx n \delta x}$$

2) Déterminer l'erreur absolue ($\Delta y = ?$) et l'erreur relative ($\delta y = ?$) si $y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

On a $y = f(x) = x^{\frac{1}{n}}$

$$\Rightarrow \delta y \approx |f'(x)| \cdot \Delta x = \frac{1}{n} |x^{\frac{1}{n}-1}| \Delta x$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta y \approx \frac{|x^{\frac{1}{n}-1}|}{n} \Delta x}$$

$$\text{et } \delta y \approx |(\ln f)'(x)| \cdot \Delta x$$

on a $f(x) = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \ln f(x) = \frac{1}{n} \ln x \Rightarrow (\ln f)'(x) = \frac{1}{n x}$

$$\Rightarrow \delta y \approx \left| \frac{1}{n x} \right| \cdot \Delta x = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\Delta x}{|x|} \right) \delta x$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta y \approx \frac{1}{n} \delta x}$$

3) Soient $x = 22,123002$ et $y = 1,252468$ où tous les chiffres sont exacts.

Trouver Δu tq $u = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$.

On a: $u = \ln\left(\frac{x}{y}\right) = 2,871502877 \cdot \left(\frac{\alpha_m = 2 \pm 0}{m = 0}\right)$
 $\approx 2,871502$

Calculons $\Delta x = ?$ or $\Delta y = ?$

* On a $x = 22,13002$, $m = 1$ et $n = 8$ (bous les ch. exact)

$\Rightarrow \Delta x \approx \frac{1}{2} 10^{m-n+1} = \frac{1}{2} 10^{1-8+1} = 5 \times 10^{-7}$

* On a $y = 1,252468$, $m = 0$ et $n = 7$ (bous les ch. sur exact)

$\Rightarrow \Delta y \approx \frac{1}{2} 10^{m-n+1} = \frac{1}{2} 10^{0-7+1} = 5 \times 10^{-6}$

On utilise la formule générale de l'erreur

$u = f(x, y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

$\Delta u \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y$

On a $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x} = \frac{1}{22,123002} = 0,045202 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{y} = -\frac{1}{1,252468} = -0,798424 \end{cases}$

Alors: $\Delta u \approx \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} = 110,61457 \times 10^{-7} + 6,26234 \times 10^{-6}$

$\Rightarrow \Delta u \approx 173,238 \times 10^{-7}$

$\Rightarrow \Delta u \approx 1,7 \times 10^{-9}$

Exo 6

II) Soit $U = 6x^2(\ln x - \sin 2y)$ avec $x = 15$ et $y = 22^\circ$.

Calculer U avec 2 chiffres exacts. i.e trouver $\Delta_x = ?$, $\Delta_y = ?$ / $n=2$

on a: $U = 6x^2(\ln x - \sin 2y) = 6 \times 15^2 (\ln 15 - \sin(2 \times 22))$

$$\Rightarrow U = 1350 \times (2,7081 - 0,6947) \\ = 2718,09 = 2 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + \dots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_m = 2 \\ m = 3 \end{array} \right.$$

U possède 2 chiffres exacts alors:

$$\Delta_U \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1} = \frac{1}{2} 10^{3-2+1} = \frac{1}{2} 10^2 = 50$$

on prend $\Delta_U \approx 50$

Pour calculer Δ_x et Δ_y on utilise le principe d'égalité des effets dans la formule générale de l'erreur absolue

on a: $U = 6x^2(\ln x - \sin 2y) = f(x, y)$

$$\Rightarrow \Delta_U \approx 2 \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \Delta_x = 2 \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \Delta_y$$

$$\text{on } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 12x(\ln x - \sin 2y) + 6x \Big|_{\substack{x=15 \\ y=22}} = 452,412 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -12x^2 \cos(2y) \Big|_{\substack{x=15 \\ y=22}} = -1942,217 \end{cases}$$

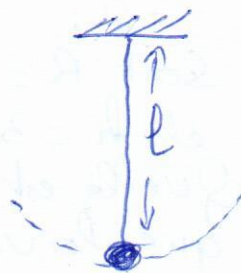
$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta_x = \frac{\Delta_U}{2 \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|} = \frac{50}{2 \times 452,412} = 5,53 \times 10^{-2} \\ \Delta_y = \frac{\Delta_U}{2 \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|} = \frac{50}{2 \times 1942,217} = 1,29 \times 10^{-2} \end{cases}$$

Donc, pour que U possède 2 chiffres exact on doit prendre $\Delta_x = 5,53 \times 10^{-2}$ et $\Delta_y = 1,29 \times 10^{-2}$.

i.e $x = 15 \pm 0,0553$, $y = 22 \pm 0,00129$

La période d'un pendule de longueur l
 est donnée par $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

Déterminer δ_l , sachant que $\delta_T = 0,5\% = 5 \times 10^{-3}$



$$\text{On a: } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = f(\pi, l, g)$$

On utilise le principe d'égalité des efforts dans
 la formule générale de l'erreur relative

$$\text{On a: } \delta_T \approx 3 \left| \frac{\partial \ln f(\pi, l, g)}{\partial l} \right| \Delta l$$

$$= 3 \left| \frac{\partial \ln f(\pi, l, g)}{\partial \pi} \right| \Delta \pi = 3 \left| \frac{\partial \ln f(\pi, l, g)}{\partial g} \right| \Delta g$$

$$\Rightarrow \Delta l = \frac{\delta_T}{3 \left| \frac{\partial \ln f(\pi, l, g)}{\partial l} \right|}$$

$$\text{On a: } f(\pi, l, g) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \ln f(\pi, l, g) = \ln \left(2\pi \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \right) = \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln(l) - \frac{1}{2} \ln(g)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln f(\pi, l, g)}{\partial l} = \frac{1}{2l}$$

$$\Rightarrow \Delta l = \frac{\delta_T}{3 \left| \frac{1}{2l} \right|} = \frac{2}{3} \delta_T |l|$$

$$\Rightarrow \delta_l = \frac{\Delta l}{|l|} = \frac{2}{3} \delta_T \cdot \frac{|l|}{|l|} = \frac{2}{3} \delta_T$$

$$\Rightarrow \delta_l = \frac{2}{3} \delta_T = \frac{2}{3} \times 5 \times 10^{-3} = 3,33 \times 10^{-3}$$