Chapitre 2

Les nombres réels

2.1 L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

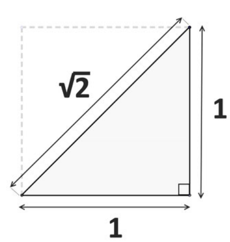
Définition 48 (Écriture décimale) *l'ensemble des **nombres rationnels** est*

$$\left\{ \frac{p}{q}; \quad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* \right\},$$

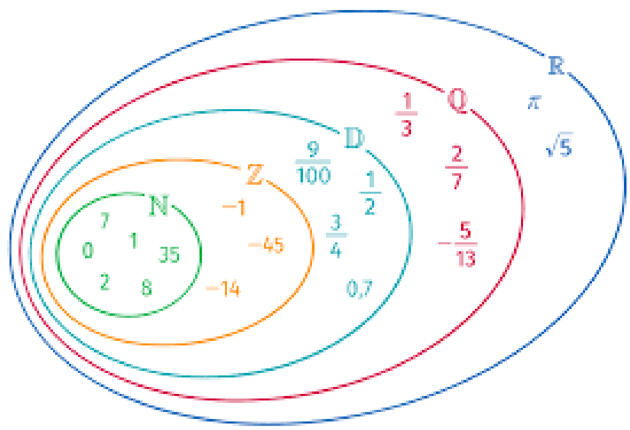
telle que $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$. *Par exemple* $\frac{2}{5}, \frac{-7}{10}$*...Les nombres **décimaux**, c'est-à-dire les nombres de la forme a* $\frac{p}{10^n}$, *avec* $a, p \in \mathbb{Z}$ *et* $n \in \mathbb{N}$, *fournissent d'autres exemples*

$$1,234 = 1234 \times 10^{-3} = \frac{1234}{1000}.$$

Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels, les **irrationnels**, par exemple la diagonale d'un carré de côté 1 est le nombre irrationnel $\sqrt{2}$.



Donc



2.2 Propriétés de $\mathbb{R}$

Propriété (R1) : Ce sont les propriétés que vous avez toujours pratiquées. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ on a

• $a + b = b + a$	• $a \times b = b \times a$
• $0 + a = a$	• $a \times 1 = a$ si $a \neq 0$
• $a + b = 0 \Leftrightarrow a = -b$	• $a \times b = 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{b}$
• $a + (b + c) = (a + b) + c$	• $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
• $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$	• $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$

Propriété (R2) : La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre, et de plus, elle est totale. Nous avons donc

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x$ alors xRx,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$; si xRy et yRx alors $x = y$,
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$; si xRy et yRz alors xRz.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on a par définition

$$x \leq y \iff y - x \in \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R};\quad x \geq 0\},$$

$$x < y \iff x \leq y \text{ et } x \neq y.$$

Les opérations de $\mathbb{R}$ sont compatibles avec la relation d'ordre $\leq$ au sens suivant, pour des réels a, b, c, d

$$(a \leq b \text{ et } c \leq d) \implies a + c \leq b + d$$
$$(a \leq b \text{ et } c \geq 0) \implies a \times c \leq b \times c$$
$$(a \leq b \text{ et } c \leq 0) \implies a \times c \geq b \times c$$

On définit le **maximum** et le **minimum** de deux réels a et b par

$$\max(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \geq b \\ b & \text{si } a < b \end{cases}$$
$$\min(a,b) = \begin{cases} b & \text{si } a \geq b \\ a & \text{si } a < b \end{cases}$$

Propriété (R3) : Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif, **la partie entière** notée $E(x)$, tel que

$$E(x) \leq x \leq E(x) + 1$$

On note aussi $E(x) = [x]$.

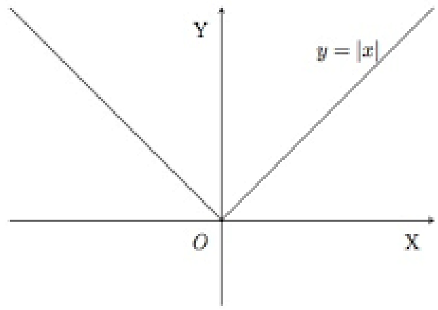
Exemple 49 *On a*

- $E(2,853) = 2, \quad (2 \leq 2.853 \leq 3)$
- $E(\pi) = 3, \quad (3 \leq \pi \leq 4)$
- $E(-\pi) = 4, \quad (-4 \leq -\pi \leq -3)$

Définition 50 (Valeur absolue) *Pour un nombre réel x, on définit* ***la valeur absolue*** *de x par*

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Ainsi, la courbe représentative de la fonction valeur absolue est la suivante



Proposition 51 $\forall x, y \in \mathbb{R}$; *on a*

1. $|x| \geq 0$; $\quad |-x| = |x|$; $\quad |x| > 0 \iff x \neq 0$
2. $\sqrt{x^2} = |x|$
3. $|x \times y| = |x| \times |y|$
4. $|x \pm y| \leq |x| \pm |y| \qquad$ (***Inégalité triangulaire***)
5. $||x| - |y|| \leq |x - y| \qquad$ (***Seconde inégalité triangulaire***)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ telsque $a < b$, les intervalles sont des parties de l'ensemble totalement ordonné $(\mathbb{R}; \leq)$.

Définition 52 (Les intervalles) ***1.*** *On appelle* ***intervalle fermé*** *d'origine a et d'extrémité b, l'ensemble défini comme suit*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}\,; \quad a \leq x \leq b\}\,.$$

2. *On appelle* ***intervalle ouvert*** *d'origine a et d'extrémité b, l'ensemble défini comme suit*

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}\,; \quad a < x < b\}\,.$$

3. *On appelle intervalle* ***semi-ouvert à droite*** *d'origine a et d'extrémité b, l'ensemble défini comme suit*

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}\,; \quad a \leq x < b\}\,.$$

4. *On appelle intervalle* ***semi-ouvert à gauche*** *d'origine a et d'extrémité b, l'ensemble défini comme suit*

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}\,; \quad a < x \leq b\}\,.$$

Définition 53 *Il est souvent pratique de rajouter les deux extrémités à la droite numérique*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Définition 54 *Soit a un réel, $V \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble. On dit que V est un* ***voisinage*** *de a s'il existe un intervalle ouvert I tel que $a \in I \subset V$.*

Remarque 55 *La notion de voisinage sera utile pour les limites.*

Définition 56 (Maximum, minimum) *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$*

1. *Un réel M est un* ***maximum*** *ou* ***(plus grand élément)*** *de A si*

$$M \in A \text{ et } \quad \forall x \in A; \quad x \leq M.$$

S'il existe, le plus grand élément est unique, on le note alors $\max A$.

2. *Un réel m est un* ***minimum*** *ou* ***(plus petit élément)*** *de A si*

$$m \in A \text{ et } \quad \forall x \in A; \quad x \geq m.$$

S'il existe, le plus petit élément est unique, on le note alors $\min A$.

Remarque 57 *Il faut garder à l'esprit que le plus grand élément ou le plus petit élément n'existent pas toujours.*

Exemple 58 • $\min\,]0,5]$ *n'existe pas et* $\max\,]0,5] = 5$,

- *L'intervalle $]a,b[$ n'a pas de plus grand élément, ni de plus petit élément.*
- $\min(]1;2] \cup \{6\})$ *n'existe pas et* $\max(]1;2] \cup \{6\}) = 6$.

Définition 59 (Majorants, Minorants) *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$*

1. *Un réel M est un* ***majorant*** *de A si $\forall x \in A; \quad x \leq M$.*
2. *Un réel m est un* ***minorant*** *de A si $\forall x \in A; \quad x \geq m$.*

Exemple 60 • 3 *est un majorant de $A = \,]0,2[$, en plus les majorants de A sont exactement les éléments de $[2,+\infty[$.*

- -3 *est un majorant de $A = \,]0,2[$, en plus les minorants de A sont exactement les éléments de $]-\infty,0]$.*
- *les minorants de $A = \,]-2,+\infty[$ sont exactement les éléments de $]-\infty,-2]$ .mais il n'y a pas de majorant.*

Si un majorant (resp. un minorant) de A existe on dit que A est **majorée** (resp. **minorée**).

il n'existe pas toujours de majorant ni de minorant, en plus on n'a pas l'unicité.

Définition 61 (Borne supérieure, borne inférieure) *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$*

1. *M est la **borne supérieure** de A si est un majorant de A et si c'est le plus petit des majorants. S'il existe on le note* $\sup A$.

2.m *est la **borne inférieure** de A si est un minorant de A et si c'est le plus grand des minorants. S'il existe on le note* $\inf A$.

Exemple 62 • *les majorants de $A =]0, 1]$ sont les éléments de $[1, +\infty[$. Donc le plus petit des majorants est 1, les minorants de $A =]0, 1]$ sont les éléments de $]-\infty, 0]$. Donc le plus grand des minorants est 0.*

• $]0, +\infty[$ *n'admet pas de borne supérieure, et* $\inf]0, +\infty[= 0$.

Théorème 63 *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure. De la même façon, toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.*

Une caractérisation équivalente du sup et inf par les suites numériques.

Théorème 64 ***1.*** *$M = \sup A$ si et seulement si M est un majorant de A et il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A qui converge vers M.*

2. *$m = \inf A$ si et seulement si m est un majorant de A et il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A qui converge vers m.*

Exercise 65 *Etudier l'existance du minimum, maximum, borne inférieure et borne supérieure des parties de $\mathbb{R}$ suivantes*

$$A = [-1, 2[\cap \mathbb{Q}, \quad B = \{-3n; \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Solution 66 ***1.*** *A est l'ensemble des rationnels contenus dans $[-1, 2[$, on a* $\inf A = \min A = -1$. $\sup A = 2$ *mais* $\max A$ *n'existe pas puisque* $2 \notin A$.

2. $\sup B = \max B = 0$ *(pour $n = 0$) mais* $\inf B$ *et* $\min B$ *n'existent pas* $(\lim\limits_{n\to+\infty} -3n = -\infty)$.

Proposition 67 *Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$;On a les assertions suivantes*

1. $A \subset B \implies \sup A \leq \sup B$ *et* $\inf B \leq \inf A$,
2. $\sup A \cup B = \max\{\sup A, \ \sup B\}$,
3. $\inf A \cup B = \min\{\inf A, \ \inf B\}$.

2.3 Raisonnement par récurrence

Le **raisonnement par récurrence** est une forme de raisonnement visant à démontrer une propriété portant sur tous les entiers naturels. Le raisonnement par récurrence consiste à démontrer les points suivants

Soit $P(n)$ la propriété qu'on veut démontrer. Pour démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq k$, (k peut être 0 ou 1 ou 2 ou...),on procède en trois étapes

Etape1 (Initialisation) : On montre que $P(k)$ est vraie.

Etape2 (Héridité) : On suppose que $P(n)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ l'est encore.

Etape3 (Conclusion) : Une fois les deux étapes précédentes sont établies, on en conclut que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$.

Exemple 68 *Démontrer par récurrence la propriété suivante*

$$\forall n \geq 1; \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soit $P(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Etape1 (Initialisation) : $P(1)$ *est vraie puisque pour* $n = 1$, *ona*

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Etape2 (Héridité) : *On suppose* $P(n)$ *vraie,c.à.d*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

et on démontre que $P(n+1)$ est vraie. En effet

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+(n+1) &= 1+2+3+\cdots+n+(n+1) \\ &= \frac{n\,(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= \frac{(n+1)\,(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Etape3 (Conclusion) : *On conclut que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.*