Université de Sétif Faculté des Sciences Dép de Mat
Année 2020/2021 Fillière: $3^{éme}$ année
TD n: 1 Mesures et Intégration

Exercice 1

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble X

1. On suppose la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone, c'est-à-dire que $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou que $A_{n+1} \subset A_n$,pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Que sont $\limsup\limits_n A_n$ et $\liminf\limits_n A_n$?

2. Même question que précédemment si la suite est définie par :$A_{2p} = A$ et $A_{2p+1} = B$, $p \in \mathbb{N}$, A et B étant deux parties données de X

3. Montrer que :

$$\chi_{\overline{\lim} A_n} = \limsup_n \chi_{A_n}.$$

Exercice 2

Soit X est un ensemble infini. Montrer que la famille $\mathcal{M}$ définie par:

$$\mathcal{M} = \{A \subset X,\ A \text{ ou } A^c \text{ est dénombrale}\}$$

est une tribu sur X..

Exercice 3.

1. Soit $a; b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Vérifier que

$$]a, b[= \overset{+\infty}{\underset{1}{\cup}} \left[a + \frac{1}{n}, b\right[,\ [a, b[= \overset{+\infty}{\underset{1}{\cap}} \left]a - \frac{1}{n}, b\right[.$$

2. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par la famille

$$S = \{[a, b[\,, a; b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Exercice 4.

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et $A, B \in \mathcal{M}$.

1. Démontrer que $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
2. Si $\mu(A) < \infty$; déduire que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.
3. Supposons que $\mu(A \cap B) < \infty$ et $\mu(A \triangle B) = 0$: Montrer que $\mu(A) + \mu(B)$.

Exercice 5.

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu))$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$.

1.On suppose que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) < \infty$, montrer que $\limsup\limits_n(A_n) \in \mathcal{M}$ et que $\mu(\limsup\limits_n(A_n) = 0$.

2. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\mu(\underset{p\geq n_0}{\cup} A_p) < \infty$. Montrer que

$$\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n) \leq \limsup_n \mu(A_n) \leq \mu(\limsup_n A_n).$$

3. Donner un exemple (c'est-à-dire choisir (X, M, μ) et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$) pour lequel :

$$\limsup_n \mu(A_n) > \mu(\limsup_n A_n).$$