Table des matières

Chapitre 1

Partie2 Mesures positives

1.1 Mesures positives.

Définition 1.1.1 *Soit* $(X, \mathcal{M})$ *un espace mesurable, une mesure positive sur* $(X, \mathcal{M})$ *(ou, plus simplement, sur* X*) est une application d'ensembles* $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ *vérifiant les propriétés suivantes*

(c1) $\mu(\phi) = 0$.

(c2) Pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{M}$ *de parties mesurables deux-à-deux disjointes, on a*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

On dit que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *est un espace mesuré.*

Commentaires

- La condition (c2) s'appelle la propriété de σ-additivité de la mesure.
- On dira souvent "mesure" au lieu de "mesure positive".
- On admettra $+\infty$ comme valeur possible, $\mathbb{R}$ est de longueur infinie.

Remarques 1.1.2 *1) Dans la définition précédente, la condition (c1) peut être remplacée par la condition*

$$\exists A \in \mathcal{M} : \mu(A) < \infty, \text{ (i.e. } \mu(A) \text{ est finie).}$$

2) La σ-additivité contient, en particulier, la propriété d'additivité simple pour tout $n \geq 1$, si les n ensemble mesurables, $A_1, \ldots, A_n$ sont deux-à-deux disjointes, alors

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n),$$

il suffit de prendre $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \phi$.

Définition 1.1.3 *Soient X un ensemble et $\mathcal{M}$ une tribu sur X. On appelle probabilité une mesure $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{M}$ telle que $\mathbb{P}(X) = 1$.*
On dit que $(X, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés les événements.

Exemples 1.1.4 *1)* ***Mesure de comptage.*** *Sur $(X, \mathcal{P}(X))$, on définit la mesure de comptage par*

$$\begin{cases} \mu(A) = card(A), & si\ A\ est\ fini \\ \mu(A) = \infty, & sinon \end{cases}$$

2) ***Mesure de Dirac en un point.*** *Soit X un ensemble et $x_0 \in X$ un point de X. Pour tout sous-ensemble A de X, la mesure δ_{x_0} de Dirac (sur $\mathcal{P}(X)$) au point x_0 est définie par*

$$\begin{cases} \delta_{x_0}(A) = 1, & si\ x_0 \in A \\ \delta_{x_0}(A) = 0, & si\ x_0 \notin A \end{cases}$$

On peut remarquer que la mesure de Dirac est une probabilité.
3) ***Mesures discrètes.*** *Soit X un ensemble, $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de points de X et $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. Pour toute partie A de X on pose*

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n . \delta_{a_n}(A) = \sum_{n=1, a_n \in A}^{\infty} \alpha_n$$

On définit ainsi une mesure positive sur $\mathcal{P}(X)$ que l'on note

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n . \delta_{a_n}.$$

Proposition 1.1.5 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. La mesure μ possède les propriétés suivantes*

1) ***(La monotonie).*** *Si $A, B \in \mathcal{M}$ avec $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

2) Si $A, B \in \mathcal{M}$ avec $A \subset B$ et $\mu(A) < \infty$ alors $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

3) ***(La sous-additivité).*** *Pour toute suite $(A_n)_{n \geqslant 1}$ dans $\mathcal{M}$ on a*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Démonstration. 1) Si $A, B \in \mathcal{M}$ avec $A \subset B$ alors $B = A \cup (B \backslash A)$, puisque $A \cap (B \backslash A) = \phi$, par l'additivité de la mesure on a

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geq \mu(A).$$

2) Si de plus $\mu(A) < \infty$ alors $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

3) A partir de la suite $(A_n)_{n \geqslant 1}$, on construit la suite $(B_n)_{n \geqslant 1}$ définie par (**??**). On a $B_n \subset A_n$ pour tout $n \geqslant 1$, les B_n sont disjoints deux à deux dans $\mathcal{M}$ et $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$ (voir la preuve de la Proposition **??**). La monotonie de la mesure donne $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$ pour tout $n \geqslant 1$. D'autre part, d'après la σ-additivité de la mesure on a

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

■

Définition 1.1.6 *On dit qu'une mesure positive μ est finie si elle est à valeurs finies c-à-d*

$$\mu(A) < \infty \text{ pour tout } A \in \mathcal{M}$$

Autrement dit, $\mu(X) < \infty$.

Définition 1.1.7 *Soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{M})$. On dit qu'elle est σ-finie s'il existe une suite de parties mesurables $(E_n)_{n \geqslant 1}$ telle que $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ et $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \geqslant 1$.*

Exemples 1.1.8 *1) La mesure de Direc* δ_x *est finie car* $\delta_x(X) = 1 < \infty$.

2) La mesure de compage sur X *est :*

i) finie si et seulement si X *est fini*

ii) σ*-finie si et seulement si* X *est dénombrable.*

1.2 Propriétés des mesures, mesures extérieures, mesures complètes.

La propiété de la continuité de la mesure sera à la base d'un des théorèmes les plus importants et l'un des plus utilisés pour l'intégrale de Lebesgue et le théorème de convergence monotone.

Théorème 1.2.1 *Soit* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré, alors*

1) ***La continuité croissante.*** *Si* $(A_n)_{n\geq 1}$ *est une suite croissante de parties mesurables, on a*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n)$$

2) ***La continuité décroissante.*** *Si* $(A_n)_{n\geq 1}$ *est une suite décroissante de parties mesurables avec*

$$\mu(A_1) < \infty, \tag{1.1}$$

alors, on a

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n)$$

Démonstration. 1) Posons

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_n = A_n \backslash A_{n-1}, \text{ pour } n \geq 2 \end{cases}$$

les ensembles B_n sont mesurables et $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ pour tout $n \geq 1$, ce qui implique que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. De plus, les B_n, $n \geq 1$, sont deux-à-deux disjoints, donc

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left(A_n\right)
\end{aligned}$$

2) Pour tout $n \geq 1$ posons $B_n = A_1 \backslash A_n = A_1 \cap A_n^c$. Comme la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est croissante, en utilisant 1)

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left(B_n\right) = \mu\left(A_1\right) - \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left(A_n\right),$$

d'autre part on a

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = A_1 \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c\right) = A_1 \backslash \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

il résulte que

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n) = \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n).$$

En fin, on peut simplifier par $\mu(A_1)$ puisque cette dernière quantité est finie,

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left(A_n\right)$$

■

La condition $\mu\left(A_1\right) < \infty$ dans 2) du théorème précédent est nécessaire comme le montre l'exemple suivant.

Exercice corrigé 1.2.2 *Considérons l'espace mesuré* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), card)$ *et la suite des parties mesurables* $(A_n)_{n\geq 1}$ *telle que*

$$A_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$$

pour montrer que la condition (1.1) est nécessaire pour la continuité décroissante de la mesure.

Démonstration. La suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante,

$$A_{n+1} = \{n+1, n+2, n+3...\} \subset A_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$$

et

$$\mu(A_1) = card(\{1, 2, ...\}) = +\infty.$$

Si $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ alors $x \geq n$ pour tout $n \geq 1$. D'où $\mathbb{N}$ est borné, ce qui est une contradiction. Donc

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \phi.$$

D'autre part

$$0 = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \neq \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} card(\{n, n+1, n+2, ...\}) = +\infty$$

■

Exercice corrigé 1.2.3 *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. Montrer que toute fonction additive définie sur $\mathcal{M}$ à valeur dans $[0, +\infty]$ satisfaisant la continuité croissante est une mesure.*

Démonstration. i) $\mu(\phi) = \mu(\phi \cup \phi) = \mu(\phi) + \mu(\phi)$ alors $\mu(\phi) = 0$.
ii) Il s'agit de vérifier la σ-additivité. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}$ disjoints deux à deux. Posons $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Cette suite est croissante et de plus on a $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. La continuité croissante et l'additivité de la mesure μ donne

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(B_n)\\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\end{aligned}$$

■

Ensemble négligeable et mesure complétes

Définition 1.2.4 *Soit* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré et* $N \subset X$*. L'ensemble* N *est dit négligeable dans* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *s'il existe* $E \in \mathcal{M}$ *tel que* $N \subset E$ *et* $\mu(E) = 0$*.*

Remarque 1.2.5 *Si* $(A_n)_{n\geq 1}$ *une suite de parties négligeables dans* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *alors* $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ *est négligeable. En effet, pour tout* $n \geq 1$ *il existe* $E_n \in \mathcal{M}$ *tel que* $A_n \subset E_n$ *et* $\mu(E_n) = 0$*. Or*

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \quad et \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0.$$

Donc $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ *est négligeable.*

Définition 1.2.6 *Un espace mesuré* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *est dit complet si toute partie négligeable est mesurable (et donc de mesure nulle). Dans ce cas on dit que la mesure* μ *est complète.*

Mesures extérieurs

Définition 1.2.7 *Soit* X *un ensemble quelconque. On appelle mesure extérieure sur* X *une application* $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ *possédant les propriétés suivantes*

i) $\mu^*(\phi) = 0$

ii) si $A \subset B \subset X$ *alors* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$*.*

iii) Pour toute suite $(A_n)_n$ *de parties de* X *on a*

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Remarque 1.2.8 *Il est clair que toute mesure positive sur* $(X, \mathcal{P}(X))$ *est une mesure extérieure sur* X*. Mais la réceproque n'est pas vraie en générale, comme le montre l'exemple suivant*

Exemple 1.2.9 *Soit* X *un ensemble non-vide. L'application* $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \{0, 1\}$ *définie par* $\mu^*(\phi) = 0$ *et* $\mu^*(A) = 1,$ *si* $A \neq \phi$ *est une mesure extérieure sur* X*.*

De plus si $card(X) > 1,$ *l'application* μ^* *n'est pas une mesure positive sur* $(X, \mathcal{P}(X))$*.*

Démonstration. Soit $A, B \in \mathcal{P}(X)$ avec $A \subset B$. Si $A = \phi$ alors $\mu^*(A) = 0 \leq \mu^*(B)$. Si $A \neq \phi$ alors $B \neq \phi$ et donc $\mu^*(A) = 1 = \mu^*(B)$.
Soit maintenant $(A_n)_n$ une suite de parties de X. Si tous les A_n sont vides on a

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \mu^*(\phi) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Pour le contraire, s'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $A_j \neq \phi$ on a $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \neq \phi$ et alors

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = 1 = \mu^*(A_j) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

ce que signifie que μ^* est une mesure extérieure sur X.
Du fait que $card(X) > 1$, on peut choisir $a, b \in X$ avec $a \neq b$. On pose $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$. Dans ce cas μ^* n'est pas additive car

$$\mu^*(A \cup B) = 1 \neq \mu^*(A) + \mu^*(B) = 2$$

Alors μ^* n'est pas une mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$. ■

Proposition 1.2.10 *Toute mesure extérieure additive sur X est une mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$.*

Démonstration. Il s'agit de vérifier la σ-additivité. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{P}(X)$ disjoints deux à deux. Tout d'abord remarquons que $\bigcup\limits_{n=1}^{p} A_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ pour tout $p \geq 1$. D'aprés l'hypothèse de l'additivité et (ii) de la Définition 1.2.7 on a

$$\sum_{n=1}^{p} \mu^*(A_n) = \mu^*(\bigcup_{n=1}^{p} A_n) \leq \mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n).$$

Par le passage à la limite quand $p \longrightarrow +\infty$ on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) \leq \mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n).$$

Cette dernière inégalité et (iii) de la Définition 1.2.7 donnent la σ-additivité de μ^*. ■

Définition 1.2.11 *Soit X un ensemble non-vide et soit μ^* une mesure extérieure sur X. Une partie E de X est dite μ^*-mesurable si pour tout $A \subset X$ on a*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{1.2}$$

On dit aussi que E est mesurable au sens de Carathéodory (par rapport à μ^*).
On note $\mathcal{M}(\mu^*)$ la famille des parties μ^*-mesurable de X.

Remarques 1.2.12 *1) La mesurabilité de E ne fait pas intervenir $\mu^*(E)$ mais $\mu^*(A)$ où A est appelée ensemble test.*
2) Pour tout $A \subset X$ on peut écrire

$$A = A \cap (E \cup E^c) = (A \cap E) \cup (A \cap E^c),$$

par la sous-additivité de la mesure extérieure (iii dans la Définition 1.2.7) on a toujours

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Alors pour montrer qu'une partie $E \subset X$ est μ^*-mesurable, il suffit de montrer que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{1.3}$$

pour tout $A \subset X$.

Exemples 1.2.13 *Soit X un ensemble non-vide*
1) X et ϕ sont μ^*-mesurables pour toute mesure extérieure.
2) Si μ^* est une mesure extérieure sur X et $E \subset X$ tel que $\mu^*(E) = 0$, alors E est μ^*-mesurable.

Démonstration. 2) Il suffit de montrer que (1.3) est vrai pour tout $A \subset X$. D'aprés les inclusions $A \cap E \subset E$ et $A \cap E^c \subset A$ on a $\mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$ et $\mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$, ce qui implique que

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A).$$

■

Théorème 1.2.14 *Soit μ^* une mesure extérieure sur un ensemble non-vide X. Alors $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une tribu sur X et la restriction de μ^* à $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une mesure.*

Démonstration. $\phi, X \in \mathcal{M}(\mu^*)$, par l'Exemple 1.2.13. De façon immédiate, à partir de l'équation (1.2) on a $E \in \mathcal{M}(\mu^*)$ si et seulement si $E^c \in \mathcal{M}(\mu^*)$. Il reste donc à voir que $\mathcal{M}(\mu^*)$ est stable par réunion dénombrable. Commençons par l'établir pour une réunion finie. Soient $E_1, E_2 \in \mathcal{M}(\mu^*)$, pour tout $A \subset X$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) \tag{1.4}$$

On teste la μ^*-mesurablité de E_2 par l'ensemble $A \cap E_1^c$

$$\mu^*(A \cap E_1^c) = \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c). \tag{1.5}$$

En portant (1.5) dans (1.4)

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c). \\ &\geq \mu^*\left[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)\right] + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c). \end{aligned}$$

Mais

$$(A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2) = A \cap [E_1 \cup (E_2 \backslash E_1)] = A \cap (E_1 \cup E_2),$$

et aussi

$$A \cap E_1^c \cap E_2^c = A \cap (E_1 \cup E_2)^c.$$

Finalement on obtient

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\left[A \cap (E_1 \cup E_2)\right] + \mu^*\left[A \cap (E_1 \cup E_2)^c\right],$$

d'où $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}(\mu^*)$.

Pour terminer la preuve de que $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une tribu, montrons la stabilité par rapport à la réunion dénombrable. Considérons une famille $(E_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{M}(\mu^*)$ deux à deux disjoints (si $(A_n)_{n \geqslant 1}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{M}(\mu^*)$, on peut toujours écrire

$\cup_{n\geqslant 1} A_n = \cup_{n\geqslant 1} E_n$, avec les éléments E_n deux à deux disjoints. Voir la preuve de la Proposition **??**). Pour tout $n \geqslant 1$, posons $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ et montrons par récurrence sur n que pour tout partie $A \subset X$ on a

$$\mu^*(A \cap F_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k). \tag{1.6}$$

La propriété est vraie au rang $n = 1$ et si l'on suppose qu'elle est vraie au rang n. Puisque $F_n \in \mathcal{M}(\mu^*)$ est une réunion finie des éléments dans $\mathcal{M}(\mu^*)$, on teste sa mesurbilité par $A \cap F_{n+1}$,

$$\mu^*(A \cap F_{n+1}) = \mu^*(A \cap F_{n+1} \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_{n+1} \cap F_n^c), \tag{1.7}$$

d'autre part le fait que $F_{n+1} \cap F_n = F_n$ et $F_{n+1} \cap F_n^c = E_{n+1}$, l'égalité (1.7) donne

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap F_{n+1}) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap E_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap E_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \mu^*(A \cap E_k). \end{aligned}$$

Maintenant si on pose $F = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k$ on a $A \cap F \supset A \cap F_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Donc d'aprés la monotonie de la mesure extérieure et (1.6) on a

$$\mu^*(A \cap F) \geq \mu^*(A \cap F_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k)$$

En prenant la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on trouve

$$\mu^*(A \cap F) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_k)$$

Inversement, par (iii) de la Définition 1.2.7,

$$\mu^*(A \cap F) = \mu^* \left[\bigcup_{k=1}^{+\infty} (A \cap E_k) \right] \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_k),$$

d'où pour tout partie $A \subset X$,

$$\mu^*(A \cap F) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_k). \tag{1.8}$$

On a $F_n^c \supset F^c$ pour tout $n \geqslant 1$ et

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_n^c) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap F_n^c) \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap F^c),
\end{aligned}$$

par le passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ et par (1.8),

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c)$$

donc $F = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k \in \mathcal{M}(\mu^*)$.

La σ-additivité de μ^* sur $\mathcal{M}(\mu^*)$ résulte de la formule (1.8) en prenant pour ensemble test $A = X$. ■

1.3 Mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens.

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Théorème 1.3.1 *[?]*

Il existe une unique mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, notée λ, telle que

$$\lambda(]a, b[) = b - a$$

pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

On l'appelle la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Remarques 1.3.2 *1) Il est clair que la mesure λ est σ-finie puisque*

$$\lambda([-n,n]) = 2n < +\infty \quad et \quad \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [-n,n]$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lambda(\{x\}) = 0$ et par conséquent

$$\lambda(]a,b[) = \lambda(]a,b]) = \lambda([a,b[) = \lambda([a,b]) = b-a.$$

En effet, $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty}]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$, donc par la continuité décroissante, (2) dans le Théorème 1.2.1, on a

$$\lambda(\{x\}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \lambda(]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$$

On en déduit immédiatement que

Proposition 1.3.3 *Tout ensemble dénombrable D de $\mathbb{R}$ possède une mesure de Lebesgue nulle, $\lambda(D) = 0$.*

Démonstration. Puisque $D = \bigcup_{n=1, x_n \in \mathbb{R}}^{+\infty} \{x_n\}$, nous avons

$$\lambda(D) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(\{x_n\}) = 0$$

ce qui implique que $\lambda(D) = 0$. ■

La mesure de Lebesgue possède des propriétés importantes.

Proposition 1.3.4 *[**?**]La mesure de Lebesgue λ est invariante par translation et invariante par symétrie. C'est-à-dire pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a*

$$\lambda(\alpha + A) = \lambda(A) \quad et \quad \lambda(-A) = \lambda(A)$$

pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, où $\alpha + A = \{a + \alpha,\ a \in A\}$ et $-A = \{-a,\ a \in A\}$.

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$.

Rappelons que un pavé P de $\mathbb{R}^m$ est un produit d'intervalles bornés $P = I_1 \times ... \times I_m$, où $I_j \subset \mathbb{R}$ $(j = 1, ..., m)$ est intervalle borné. La mesure du pavé P est donnée par

$$m(P) = |I_1| \times ... \times |I_m|,$$

où $|I_j|$ est la longueur du segment I_j.

Définition 1.3.5 *Pour toute partie A de $\mathbb{R}^m$, on définit*

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} m(P_i) : A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_i,\ P_i \text{ pavé ouvert de } \mathbb{R}^m\right\}$$

L'infimum est pris sur tous les recouvrements dénombrables de A par des pavés ouverts.

Théorème 1.3.6 *[**?**]On a les assertions suivantes*

i) λ^* est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^m$.

ii) La tribu $\mathcal{M}(\mu^*)$ contient la tribu de Borel, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

iii) $\lambda^*(P) = m(P)$, pour tout pavé $P \subset \mathbb{R}^m$.