

Notes de Cours.

En plus des cours mis en ligne par V. Chouhri, il y aura quelques notes de cours supplémentaires pour bien assimiler le contenu du module de topologie.

Voici ce qui me semble être les exigences minimales vis-à-vis du cours.

- Le cours doit être relu au moins une ou deux fois dans son intégralité, de préférence le jour même.
 - Les résultats (théorèmes, propositions, etc...) et définitions doivent être su et compris.
 - Les démonstrations doivent aussi être comprises soigneusement. Beaucoup de démonstrations illustrent la mise en œuvre des techniques pour les exercices de TD.
 - Dans un exercice, cette technique consiste à relire la démonstration, puis essayer de la refaire tout seul.
- Je rappelle qu'il ne faut jamais hésiter à poser des questions lors des séances de cours, même avant ou dehors du cours, sur TDs et par courrier électronique.

Ch I: Topologie de $\mathbb{R}$.

On appelle ouvert toute réunion d'intervalles ouverts.

⊕ Les ouverts vérifient :

- Toute réunion d'ouverts est un ouvert
- Toute intersection d'ouverts est un ouvert
* finie
- $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des ouverts.

On appelle fermé tout complémentaire d'ouverts.

⊕ Les fermés vérifient :

- Toute intersection de fermés est un fermé
- Toute réunion finie de fermés est un fermé.
- $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des fermés

Voisinage. On appelle voisinage de $a \in \mathbb{R}$, toute

À RETENIR partie contenant un ouvert contenant a
On note par $V(a)$ l'ensemble des voisinages de a .

À RETENIR: Un ouvert est voisinage de tous ses points.

① Adhérence, intérieur, point d'accumulation
de $A \subset \mathbb{R}$.

②

② $a \in \mathbb{R}$ est adhérent à $A \subset \mathbb{R}$, si
 $\forall v \in \mathcal{V}(a) \quad v \cap A \neq \emptyset$.

(on dit: Tout voisinage de a rencontre A)

③ L'adhérence $\bar{A}$ (ou $\text{Adh } A$) est l'ensemble des points adhérents).
C'est le plus petit fermé contenant A . $\rightarrow \bar{A}$ RETENIR!

④ L'intérieur $\overset{\circ}{A}$ (ou $\text{Int } A$) de A est le plus grand ouvert
contenu dans A . $\subset \bar{A}$ RETENIR!

⑤ $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de A , si
 $\forall v \in \mathcal{V}(a) \quad v \cap A \neq \emptyset$ et $v \cap A \neq \{a\}$

on note par A' : l'ens. des pts d'acco. de A .

Thm de Bolzano-Weierstrass:

Toute partie infinie bornée de $\mathbb{R}$ a au moins
un pt d'accumulation.

Récapitulons ! Pour comprendre les définitions précédentes.

④ Ensemble ouvert de $\mathbb{R}$.

Soit $A \subset \mathbb{R}$, un point $x \in A$ est un point intérieur de A (ou point intérieur à A) si, et seulement, si :

$x \in O = \text{intervalle ouvert contenu dans } A$.

$$\underline{x \in O \subset A}$$

→ un ensemble est ouvert, si chacun de ses points est un point intérieur.

Exemples:.. $A = (a, b)$ intervalle ouvert (ensemble) ouvert
On peut choisir $O = A \quad \forall x \in A$.

- $\mathbb{R}$ est un ouvert, puisque tout intervalle ouvert O est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$: $x \in O \subset \mathbb{R}$.

- L'ensemble fermé $B = [a, b]$ n'est pas un ensemble ouvert puisque tout intervalle contenant a ou b contient des points extérieurs à B . Ainsi a et b ne sont pas des points intérieurs à B .

- $\emptyset$ est un ouvert

Exemple. Une intersection qqe d'ouverts n'est pas un ouvert.

$$A_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[, n \geq 1.$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\} = \text{fermé.}$$

① point d'accumulation.

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Un point $x \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation (ou pt limite) de A ssi :

Tout ouvert O contenant x , contient un point de A autre que x : c'est à dire :

$$O \text{ ouvert, } x \in O \Rightarrow A \cap (O \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Exple. $A = \{1, 1/2, 1/3, \dots\} = \{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

le point 0 est un point d'accumulation de A
(Remarque qu'un pt d'acc. n'est pas nécessairement $\in A$)

- Dans $\mathbb{Q}$, tout nbre réel est un point d'acc. de $\mathbb{Q}$.
- $\mathbb{Z}$ n'a pas de pts d'acc.

② Ensembles fermés.

Un ensemble est fermé, si son complémentaire est un ouvert.

à Retenir $\rightarrow$ Un sous-ens. de $\mathbb{R}$ est fermé, ssi il contient tous ses pts d'accumulation.

Exple - $A = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ n'est pas fermé.
car 0 est un pt d'acc. qui n'appartient pas à A .

- $A = [a, b]$ n'est pas ouvert, puisque b n'est pas intérieur à A . Il n'est pas aussi fermé puisque $a \notin A$ mais a est un pt d'acc. de A .