Université de Sétif | Faculté des Sciences
Département de Mathématiques | Module de statistiques probabilités
2016/2017 | 1ère année MI

SERIE 3 : Probabilités

Exercice 1 : on a 35 boules identiques numérotées de 1 à 35. On tire au hasard une boule, quelle est la probabilité que son numéro soit a) pair ; b) multiple de 3) ; c) plus grand que 5 ?

Exercice 2 : on lance simultanément 2 dés. Quelle est la probabilité que :

a) La somme des 2 nombres obtenus soit égale à 7 ?
b) Le plus grand des 2 nombres soit inférieur à 4 ?

Exercice 3: Une urne contient 4 boules blanches et 10 boules noires.

1) On tire au hasard deux boules (sans remise) de l'urne. Quelle est la probabilité que :
   a) l'une soit blanche et l'autre noire ?
   b) elles soient toutes les 2 blanches ?
   c) Qu'elles soient de la même couleur
2) On tire la première boule, on la remet dans l'urne, on mélange et on tire la seconde (tirage avec remise). Mêmes questions.

Exercice 4 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. A et B et C trois évènements de $\mathcal{A}$.
On a $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$, $P(C) = 0.4$, $P(A\cap\overline{B}) = 0.2$ et $P(C\cap\overline{B}) = 0.2$.
Calculer les probabilités suivantes : $P(\overline{B})$, $P(A\cap B)$, $P(\overline{A}\cup\overline{B})$, $P(B\cup C)$.

Exercice 5 : soit P une probabilité définie sur un ensemble fini ou dénombrable Ω. On note par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Montrer que pour $\forall A\in \mathcal{P}(\Omega), \forall B\in \mathcal{P}(\Omega), \forall C\in \mathcal{P}(\Omega)$, on a :

1) $P(A\cap \overline{B}) = P(A) - P(A\cap B)$
2) $P(\overline{A}\cup \overline{B}) = 1 - P(A\cap B)$
3) $P(A\Delta B) = P(A\cup B) - P(A\cap B)$ *$A\Delta B$ est la différence symétrique*
4) $A\cap B = A\cap C = B\cap C = \varnothing \quad \Rightarrow \quad P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)$

Exercice 6 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. A et B deux évènements de $\mathcal{A}$. Calculer la probabilité suivante $P[(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)]$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et $P(A\cap B)$.

SERIE 3 : Probabilités le Corrigé

Exercice1 : nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles a) 17/35 b) 11/35 c) 30/35

Exercice2 :

a)soit i le résultat du 1er dé et j celui du 2ème dé.

$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots(1,6),(2,1),\ldots,(2,6),\ldots,(6,1),\ldots,(6,6)\}$

Le tableau suivant nous donne la somme des i+j.

6 couples (i,j) nous donnent la somme égale à7.

Le nombre de couples possibles est 36.

La probabilité cherchée est 6/36

b) nombre de couples (i,j) tels que i<4 et j<4, on peut les compter, 3×3 cas favorables.

La probabilité cherchée est 9/36

i\j	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Eercice3 : nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles 1) a) $p = \frac{C_4^1 \times C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{24}{45}$ b) $\frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45}$ c) =1-p = $\frac{21}{45}$ ou bien directement $\frac{C_4^2 + C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{21}{45}$

2) a) (1ère blanche et 2ème noire) ou (1ère noire et 2ème blanche) $P_1 = 2 \times \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{48}{100}$

b) $\frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{100}$ c) 1-P_1=1-$\frac{48}{100} = \frac{52}{100}$ ou bien directement $\frac{4\times4+6\times6}{100} = \frac{52}{100}$

Exercice 4 : $P(\bar{B})$=1-P(B)=0.7.

$A \cap B = A - A \cap \bar{B}$ et $A \cap \bar{B} \subset A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B}) = 0.5 - 0.2 = 0.3$

$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$ = 0.7.

$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$, or $P(B \cap C) = P(C) - P(C \cap \bar{B}) = 0.4 - 0.2 = 0.2$

$P(B \cup C) = 0.3 + 0.4 - 0.2 = 0.5$

Exercice 5 :

1) $\forall A \in P(\Omega), \forall B \in P(\Omega), \quad A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

$(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cap \bar{B}) = A \cap \Phi = \Phi \Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

Remarque $A \cap \bar{B} = A - B = A - A \cap B$ et $A \cap B \subset A$

2) De l'égalité $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, on tire $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$.

3) de l'expression de la différence symétrique $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, on a

$(A - B) \cap (B - A) = \varnothing \Rightarrow P(A \Delta B) = P(A - B) + P(B - A)$. En utilisant la question 1) :

$P(A \Delta B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$

4) on pose E=B∪C, $P(A \cup B \cup C) = P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E)$.

$A \cap E = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \varnothing \Rightarrow \quad P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$.

Exercice 6 : $A \cap \bar{B} = A - A \cap B$ et $(\bar{A} \cap B) = B - A = B - A \cap B$,

$(A \cap \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap B) = \Phi \Rightarrow P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$