Département de Mathématiques
UFAS
Mars 2020
Sections **A**, **B**, **C**, **D**

Série d'exercices N°2 d'Analyse2

Exercice 1: Montrer que les fonctions suivantes admettent un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0
a) $f(x) = \log(2+x)$, b) $g(x) = \cos(1+x)$.

Exercice 2: Soit f une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0.
Montrer que si f est continue en 0, f est dérivable en 0.

Exercice 3: Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$, par

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Etudier la continuité de g en 0
b) Montrer que g admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.
c) Former ce développement.

Exercice 4: Etudier si la fonction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{tgx}$ a un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 5: développement limité au voisinage de 0
$f(x) = \sin x . \cos 2x$, n=6; $f(x) = \cos x . \log(1+x)$, n=4; $f(x) = e^x . \log(1+x)$, n=3;
$f(x) = (x^3+1). \sqrt{1-x}$, n=3; $f(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$, n=2

Exercice 6: Donner le développement limité généralisé au voisinage de 0 à l'ordre 3 de $f(x) = \dfrac{\cos x}{\log(1+x)}$.

Exercice 7: a) Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 5 de $f(x) = Argthx$. (Utiliser la dérivée de f)
b) Faire un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 5 de
$g(x) = \dfrac{Argthx}{1-x^2}$.
c) En déduire le développement limité au voisinage de 0 d'ordre 6 de
$G(x) = \frac{1}{2}(Argthx)^2$.
d) Même questions avec $f(x) = Arctgx$, $g(x) = \dfrac{Arctgx}{1+x^2}$ et $G(x) = (Arctgx)^2$

Département de Mathématiques L.DERBAL
Université de Sétif 1
Avril 2020
Sections A,B,C,D

Solution de la Serie $N°2$ d'analyse2

Solution 1 ***(exercice1)***

a) *f est de classe C^{∞} sur $]-2,\infty[$ et on a :*
$\forall x > 2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2+x} = (2+x)^{-1}, \\ f''(x) &= -(2+x)^{-2}, \\ f'''(x) &= 2(2+x)^{-3}, \end{aligned}$$

par récurrence on a :

$$\forall x > 2, \forall n \in N^{*}\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2+x)^{n}}.$$

D'après le développement de Taylor-Young au vosinage de zéro, on obtient

$$f(x) = \log 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + ... + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n2^n} + o(x^n).$$

b) *La fonction $g(x) = \cos(1+x)$ est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ et on a*

$$\forall n \in N : g^{(n)}(x) = \cos(1 + x + n\frac{\pi}{2}).$$

Donc d'après le développement limité (DL)

$$g(x) = \cos 1 - \frac{x}{2!}\sin 1 - \frac{x^2}{2!}\cos 1 + \frac{x^3}{3!}\sin 1 + ... + \frac{x^n}{n!}\cos\left(1 + n\frac{\pi}{2}\right) + o(x^n).$$

Solution 2 ***(exercice2)***

f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de zéro $\Rightarrow \exists\ a_0, a_1$ et une fonction ε tels que pour tout élément x non nul d'un intervalle I de R :

$$f(x) = a_0 + a_1\ x + x\varepsilon(x)\ \text{ et } \lim_{x\longrightarrow 0}\varepsilon(x) = 0.$$

f est continue en $0 \Rightarrow f(0) = a_0$ de plus

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x) - a_0}{x} = a_1\ \Leftrightarrow \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = a_1\ ,$$

d'où la dérivabilité de f en 0.

Solution 3 *(exercice3)*

a) *On a :* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} g(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1 \neq 2$, *donc* g *est discontinue en* 0.

b) *Au voisinage de zéro on a :*

$$\forall n \in N:\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(x^{n+1}\right).$$

Alors :

$$\forall x \in R^*:\ \frac{e^x-1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + ... + \frac{x^n}{(n+1)!} + o\left(x^n\right),$$

d'où le résultat.

Solution 4 ***(exercice4)***

$f(x) = \sqrt[3]{tgx}$,

$f \in C^\infty(I)$ *où* $I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, *donc* f *admet un développement limité d'ordre 3 au voisinage de* $\dfrac{\pi}{4}$.

$$f(x) = f(\frac{\pi}{4}) + \left(x-\frac{\pi}{4}\right) f'(\frac{\pi}{4}) + \left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 \frac{f''(\frac{\pi}{4})}{2!} + \left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 \frac{f'''(\frac{\pi}{4})}{3!} + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right).$$

Calculant $f(\frac{\pi}{4}), f'(\frac{\pi}{4}), f''(\frac{\pi}{4})$ *et* $f'''(\frac{\pi}{4})$ *respectivement.*

$$f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt[3]{tg\frac{\pi}{4}} = 1.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(tgx^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} tgx^{-\frac{2}{3}} \left(1+tgx^2\right) \\ &\Rightarrow\ f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{2}{9} tgx^{-\frac{5}{3}} \left(1+tgx^2\right)^2 + (2tgx)\left(1+tgx^2\right) \frac{1}{3} tgx^{-\frac{2}{3}} \\ &= -\frac{2}{9} tgx^{-\frac{5}{3}} \left(1+tgx^2\right)^2 + \frac{2}{3} tgx^{\frac{1}{3}} \left(1+tgx^2\right) \\ &\Rightarrow\ f''(\frac{\pi}{4}) = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{10}{27} tgx^{-\frac{8}{3}} \left(1+tgx^2\right)^3 + 2\left(2tgx\right)\left(1+tgx^2\right)^2 \left(-\frac{2}{9}\right) tgx^{-\frac{5}{3}} \\ &+ \frac{2}{9} tgx^{-\frac{2}{3}} \left(1+tgx^2\right)^2 + 2tgx\left(1+tgx^2\right) \frac{2}{3} tgx^{\frac{1}{3}}. \\ &\Rightarrow \quad f'''(\frac{\pi}{4}) = \frac{80}{27} - \frac{32}{9} + \frac{8}{9} + \frac{8}{3} = \frac{80}{27}. \end{aligned}$$

Donc

$$f(x) = 1 + \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{9}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{40}{81}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right).$$

Solution 5 ***(exercice5)***

1) $f(x) = \sin x \cos 2x$.

$\forall x \in R : \sin x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)$.

Au voisinage de zéro on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^6\right) \\ \sin 3x = 3x - \frac{9x^3}{2} + \frac{81x^5}{40} + o\left(x^6\right) \end{array} \right. .$$

D'où

$$\sin x \cos 2x = x - \frac{13x^3}{6} + \frac{121x^5}{120} + o\left(x^6\right).$$

2) $f(x) = \cos x \log(1+x)$.

Au voisinage de zéro on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right) \\ \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right) \end{array} \right. .$$

Donc

$$\cos x \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).$$

3) $f(x) = e^x \log(1+x)$.

Au voisinage de zéro on a :

$$\begin{array}{l} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x3}{3!} + o\left(x^3\right). \\ \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) \end{array},$$

donc

$$e^x \log(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x3}{3} + o\left(x^3\right).$$

4) $f(x) = (x^3+1)\sqrt{1-x}$.

Au voisinage de zéro on a :

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x3}{16} + o\left(x^3\right) \\ (x^3+1)\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{15x3}{16} + o\left(x^3\right) \end{cases}.$$

5) $f(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$.
Au voisinage de zéro on a :

$$\begin{cases} \sin x - 1 = -1 + x + o\left(x^2\right) \\ \cos x + 1 = 2 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \end{cases},$$

d'après la division suivant les puissances croissantes de x , on a :

$$\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right).$$

$$\begin{array}{l|l}
-1 + x & \\
- & \\
\cline{1-1}
-1 + \frac{x^2}{4} & 2 - \frac{x^2}{2} \\
\cline{1-1} \cline{2-2}
x - \frac{x^2}{4} & -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \\
- & \\
x - \frac{x^3}{4} & \\
\cline{1-1}
-\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} & \\
- & \\
-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16} & \\
\cline{1-1}
-\frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{16} &
\end{array}$$

Solution 6 ***(exercice6)***
Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ *la fonction f n'admet pas un développement limité au voisinage de $x = 0$. On cherche alors un développement limité généralisé* $\left(\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\cos x}{\frac{\ln(1+x)}{x}} = 1 \right)$ *,pour cela, on écrit*

le (DL) à l'ordre 4 au voisinage de $x=0$ de $xf(x)$.

$$\begin{aligned}\frac{x\cos x}{\ln(1+x)} &= \frac{x\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)\right)}{x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^5}{5}+o\left(x^5\right)} \\ &= \frac{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)}{1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{x^4}{5}+o\left(x^5\right)}.\end{aligned}$$

En faisant la division suivant les puissances croissantes de x, de $1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$ par $1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4$, on obtient :

$$\frac{x\cos x}{\ln(1+x)} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{7}{12}x^2-\frac{5}{24}x^3+\frac{41}{720}x^4+o\left(x^4\right),$$

avec $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{o\left(x^4\right)}{x^4}=0$, *d'où*

$$\frac{\cos x}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{7}{12}x-\frac{5}{24}x^2+...+o\left(x^3\right),$$

Solution 7 ***(exercice7)***

a) *la fonction $f = Argth$ est définie pour tout x, tel que $|x|<1$. C'est une primitive de la fonction $f' : x \to \dfrac{1}{1-x^2}$. Elle admet donc un développement limité d'ordre 5, au voisinage de 0, dont la partie régulière est la primitive de la partie régulière du développement limité de f', qui vaut $f(0)$ en 0. Donc, puisque*

$$\frac{1}{1-x^2} = 1+x^2+x^4+o\left(x^4\right),$$

et

$$\int \frac{1}{1-x^2} = Argth\,(x)+c \quad (|x|<1),$$

alors

$$Argthx + c = \int \left(1+x^2+x^4+o\left(x^4\right)\right)dx,$$

et d'après l'unicité du développennment limité, on obtient

$$Argthx = k+x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+o\left(x^5\right) \text{ où } k = Argth0 = 0.$$

Ainsi le développement limité à l'ordre 5 de $Argthx$, au voisinage de zéro :

$$Argthx = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+o\left(x^5\right) \text{ avec } \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{o\left(x^5\right)}{x^5}=0$$

b) *On peut procéder de deux manières pour obtenir le développement limité de la fonction g.*

<u>1èreméthode</u> *: Elle consiste à prendre le développement limité des fonctions $x \rightarrow Argthx$ et $x \rightarrow \dfrac{1}{1-x^2}$ et faire le produit de deux parties régulières. Ainsi, puisque*

$$Argthx = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o\left(x^5\right) \ \ et \ \ \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o\left(x^5\right),$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{Argthx}{1-x^2} &= \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o\left(x^5\right)\right)\left(1 + x^2 + x^4 + o\left(x^5\right)\right) \\
&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + x^3 + \frac{1}{3}x^5 + x^5 + o\left(x^5\right) \\
&= x + \frac{4}{3}x^3 + \frac{23}{15}x^5 + o\left(x^5\right) \ \ avec \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{o\left(x^5\right)}{x^5} = 0 \ .
\end{aligned}$$

<u>2èmeméthode</u> : Elle consiste à prendre le développement limité de la fonction $x \rightarrow Argthx$ et faire ensuite la division suivant les puissances croissantes de la partie régulière de ce développement par $1 - x^2$. On a donc

$$\begin{array}{l|l}
x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 & \\
- & 1 - x^2 \\
\underline{x - x^3} & x + \frac{4}{3}x^3 + \frac{23}{15}x^5 \\
\frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 & \\
- & \\
\underline{\frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^5} & \\
\qquad \frac{23}{15}x^5 &
\end{array}$$

d'où le résultat.

c) *La fonction G étant une primitive de la fonction g elle admet un développement limité. La partie régulière de ce développement limité est obtenue par intégration de la partie régulière du développement limité de la fonction g où la constante d'intégration vaut $G\ (0)$(d'après le théorème de l'intégration d'un développement limité). Donc*

$$\frac{1}{2}\left(Argthx\right)^2 = c + \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{12}x^4 + \frac{23}{90}x^6 + o\left(x^6\right) \ \ avec \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{o\left(x^6\right)}{x^6} = 0$$

et $c = G\ (0) = 0$.

d) *Faisant un raisonement analogue à celui des questions précédentes. On trouve*

$$\begin{aligned}
Arctgx &= \int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \left(1 - x^2 + x^4 + o\left(x^4\right)\right)dx \\
&= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{Arctgx}{1+x^2} &= \left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+o\left(x^5\right)\right)\left(1-x^2+x^4+o\left(x^5\right)\right)\\ &= x-\frac{4}{3}x^3+\frac{23}{15}x^5+o\left(x^5\right) \;\; avec \; \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{o\left(x^5\right)}{x^5}=0 \; .\end{aligned}$$

$$\int\frac{Arctgx}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\left(Arctgx\right)^2=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{23}{90}x^6+o\left(x^6\right)$$

D'où

$$\left(Arctgx\right)^2=x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{23}{45}x^6+o\left(x^6\right).$$