

Série d'exercices N°3 d'Analyse2

Exercice 1: Soit $n \in \mathbb{N}$ considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{p^2}{n^2} \cdot \sin \pi x \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right]$.
Calculer en fonction de n , $\int_0^1 f(x) dx$.

Indication: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 2: Calculer par la méthode des limites

$$\int_0^1 x dx; \int_0^1 x^2 dx; \int_0^1 x^3 dx$$

sachant que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Exercice 3: Soit $x \in \mathbb{R}^+$, à l'aide des propriétés des suites géométriques,

démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}} = \frac{e^x - 1}{x}$.

Utiliser ce résultat pour établir, pour tout nombre réel $x > 0$, la relation

$$\int_0^x e^t dt = e^x - 1.$$

Exercice 4: Calculer les intégrales suivantes:

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx \text{ ind. poser: } u = \log x$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+\log(x)}} dx \text{ ind. poser: } u = \log x$$

$$\int \frac{x \log x}{(1+x^2)^2} dx, \text{ ind. intégration par parties}$$

$$\int x e^{\sqrt{x}} dx, \text{ ind. poser: } \sqrt{x} = t$$

$$\int \cos x e^{\sin x} dx, \text{ ind. poser: } \sin x = t$$

$$\int e^{2x} \cos e^x dx, \text{ ind. poser: } t = e^x \text{ puis intégration par parties}$$

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx, \text{ ind. diviser la fraction par } \cos x \text{ et poser } u = \tan x$$

$$\int x \tan^2 x dx, \text{ ind. poser: intégration par parties}$$

$$\int \frac{1}{3+5x^2} dx, \text{ ind. mettre cette intégrale sous la forme } \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+(5/3)x^2} dx$$

$$\text{et poser } u = \sqrt{\frac{5}{3}} x$$

$$\int (1+2x) \arg \tanh x dx, \text{ ind. intégration par parties}$$

$$\int x^2 \sinh x dx, \text{ ind. 2 intégration par parties:}$$

Exercice 5: Calculer les primitives des fractions rationnelles

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx, \text{ ind. faire une division suivant les puissances}$$

décomposer la fraction rationnelle

croissantes de x

$\int \frac{x+3}{(x^2+1)(x-2)^2} dx$, ind. décomposer la fraction rationnelle

$\int \frac{10}{(x^2+4x+5)^3} dx$, ind. écrire $x^2+4x+5 = (x+2)^2+1$ et poser $x+2 = t$

$\int \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2} dx$, ind. écrire la dérivée de (x^2-x+1) au numérateur

$\int \frac{1}{1+\cos 2x} dx$, ind. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\int \frac{1}{1+\sin x - \cos x} dx$, ind. poser $u = \tan(x/2)$ l'intégrale devient $\int \frac{dt}{t+t^2}$
ensuite décomposer la fraction rationnelle

$\int \frac{\sin x}{\cos x(1+\cos x)^2} dx$, ind. poser $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$ l'intégrale

devient $\int \frac{-du}{u(1+u)^2}$ ensuite décomposer la fraction en éléments simple

$\int \frac{1}{1+\tan x} dx$, ind. poser $\tan x = u$

$\int \tan^3 x dx$, ind. écrire $\int \tan^3 x dx = \int [\tan x(1+\tan^2 x) - \tan x] dx$
puis poser $\tan x = u$

Exercice 6: Soit α un réel strictement positif.

1) Pour quelle valeur de α l'intégrale $I = \int_0^{2\pi} \log(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx$
est elle définie

2) Calculer I lorsqu'elle est définie.

Exo 1: Soit $f(x) = \frac{p^2}{n^2}$ si $x \in [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[$ $p \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq n-1$.

On considère la subdivision $\{x_0 = 0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de l'intervalle $[0, 1]$ tq $x_p = \frac{p}{n}$ ou $0 \leq p \leq n$.

On a $f(x) = \frac{p^2}{n^2}$, $\forall x \in [x_p, x_{p+1}[$, ce qui fait que f est une fonction en escalier.

Alors, par définition on a:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \sum_{p=0}^{n-1} (x_{p+1} - x_p) \cdot f(x) \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{p+1}{n} - \frac{p}{n} \right) \cdot \frac{p^2}{n^2} \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{p^2}{n^2} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{p^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{p=0}^{n-1} p^2 \end{aligned}$$

On sait que: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{k=0}^n k^2$

Alors:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{n^3} \sum_{p=0}^{n-1} p^2 = \frac{1}{n^3} \left(\frac{(n-1)(n)(2(n-1)+1)}{6} \right)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

Exo 2 : Calculer par la méthode des limites les intégrales suivantes.

On a $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a + k(\frac{b-a}{n}))$

1) $\int_0^1 x dx = \int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^n f(0 + k(\frac{1-0}{n}))$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \quad (f(x)=x)$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = \boxed{\frac{1}{2}}$

2) $\int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^n f(0 + k(\frac{1-0}{n}))$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^2 \quad (f(x)=x^2)$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \boxed{\frac{1}{3}}$

3) $\int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^n f(0 + k(\frac{1-0}{n}))$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^3 \quad (f(x)=x^3)$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^4} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) = \boxed{\frac{1}{4}}$

4) $\int_0^1 e^x dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(e^{\frac{1}{n}} \right)^k$
 Somme d'une suite géométrique
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left[e^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1-e^{\frac{1}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{1}{n}}} \right) \right]$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n}} \frac{(e-1)}{\left(\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \right)} = \boxed{e-1} \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \right)$

Exo 3: Soit $x \in \mathbb{R}^+$ ($x \geq 0$), à l'aide des propriétés des suites géométriques, démontrer que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}} = \frac{e^x - 1}{x} ?$$

On a $\sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}} = \sum_{p=0}^{n-1} (e^{\frac{x}{n}})^p$ (somme d'une suite géométrique)
 le 1^{er} terme 1 et la raison $q = e^{\frac{x}{n}}$.

$$= 1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1 - e^{(\frac{x}{n})^n}}{1 - e^{\frac{x}{n}}} = \frac{1 - e^x}{1 - e^{\frac{x}{n}}}$$

Alors: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - e^x}{1 - e^{\frac{x}{n}}}$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^x}{x \cdot \left(\frac{1 - e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} \right)} = \frac{e^x - 1}{x} \quad \left(\begin{array}{l} n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{x}{n} \rightarrow 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} = -1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}} = \frac{e^x - 1}{x}}$$

2) Utiliser ce résultat pour établir la relation:

$$\int_0^x e^t dt = e^x - 1, \quad \forall x \geq 0.$$

On a: $\int_0^x e^t dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x-0}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{kx}{n}}$ $(f(a+k \cdot \frac{b-a}{n}) = f(\frac{kx}{n}))$
 $a=0, b=x$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{kx}{n}} \cdot e^{\frac{(k-1)x}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} \cdot e^{\frac{x}{n}} \cdot \sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} x \cdot \underbrace{e^{\frac{x}{n}}}_{\substack{\downarrow \\ e=1}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}} = x \cdot \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^x e^t dt = e^x - 1}$$

Exo 4 Calculer les primitives:

1) $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$, on fait un changement de variable
($u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$)

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + K = \boxed{-\frac{1}{\ln x} + K} \quad / K \in \mathbb{R}$$

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$, on pose $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int \frac{1}{\sqrt{1+u}} du = 2\sqrt{1+u} + K = \boxed{2\sqrt{1+\ln x} + K} \quad / K \in \mathbb{R}$$

3) $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$, on fait une intégration par parties.
 $\int u v' = u v - \int u' v$

On pose: $u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$
 $v' = \frac{x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \quad (v = \frac{1}{f(x)})$
 $= -\frac{1}{2} \left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2} \right) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left(\frac{1}{f(x)} \right)'$

Alors: $\int \ln x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \int u v' = u v - \int u' v$
 $= \ln x \left(-\frac{1}{2(1+x^2)} \right) + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x(1+x^2)}$

$$I = \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$
$$= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + K$$

$$\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + K \quad / K \in \mathbb{R}$$

4) $\int \cos x e^{\sin x} dx$ ($\sin x = t \Rightarrow dt = \cos x dx$)
 $= \int e^t dt = e^t + K = e^{\sin x} + K$
 $\Rightarrow \int \cos x e^{\sin x} dx = e^{\sin x} + K \quad / K \in \mathbb{R}$

5) $\int e^{2x} \cos(e^x) dx$, on pose $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$.

$$\int e^{2x} \cos(e^x) dx = \int \underbrace{t}_{u} \underbrace{\cos t}_{v'} dt \quad \left(\begin{array}{l} e^{2x} = e^x \cdot e^x = t^2 \\ u = t \Rightarrow u' = 1 \\ v' = \cos t \Rightarrow v = \sin t \end{array} \right)$$

$$= t \sin t - \int \sin t dt = t \sin t + \cos t + K.$$

$$\Rightarrow \boxed{\int e^{2x} \cos(e^x) dx = e^x \sin(e^x) + \cos(e^x) + K \mid K \in \mathbb{R}}$$

6) $\int x e^{\sqrt{x}} dx$, on pose $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2$.
 $dx = 2t dt$.

$$\int x e^{\sqrt{x}} dx = \int t^2 e^t 2t dt = 2 \int \underbrace{t^3}_{u} \underbrace{e^t}_{v'} dt \quad (\text{Int. par parties})$$

$$= 2t^3 e^t - \int \underbrace{6t^2}_{u'} \underbrace{e^t}_{v} dt$$

$$= 2t^3 e^t - \left[6t^2 e^t - \int \underbrace{12t}_{u'} \underbrace{e^t}_{v} dt \right]$$

$$= 2t^3 e^t - \left[6t^2 e^t - \left[12t e^t - \int 12 e^t dt \right] \right]$$

$$= 2t^3 e^t - 6t^2 e^t + 12t e^t - 12 e^t + K$$

$$= e^t (2t^3 - 6t^2 + 12t - 12) + K \quad \text{tg } t = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int x e^{\sqrt{x}} dx = e^{\sqrt{x}} (2x\sqrt{x} - 6x + 12\sqrt{x} - 12) + K \mid K \in \mathbb{R}}$$

7) $\int \frac{dx}{3+5x^2} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{1 + \frac{5}{3}x^2}$, On pose $u = \sqrt{\frac{5}{3}} x \Rightarrow dx = \sqrt{\frac{3}{5}} du$

$$\int \frac{dx}{3+5x^2} = \frac{1}{3} \int \frac{\sqrt{\frac{3}{5}} du}{1+u^2} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{15}} \text{Arctg } u + K.$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{dx}{3+5x^2} = \frac{1}{\sqrt{15}} \text{Arctg} \left(\sqrt{\frac{5}{3}} x \right) + K \mid K \in \mathbb{R}}$$

Cas général:

$$\int \frac{dx}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \text{Arctg} \left(\frac{u}{a} \right) + K.$$

8) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$, on divise la fraction par $\cos x$

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} dx = F(x)$$

On pose $u = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan u \cdot e dx = \frac{du}{1+u^2}$

$$\text{Aussi: } F(x) = \int \frac{u-1}{u+1} \cdot \frac{du}{1+u^2}$$

On fait la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle:

$$\frac{u-1}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{-1}{1+u} + \frac{u}{1+u^2}$$

$$\Rightarrow F(x) = -\int \frac{1}{1+u} du + \frac{1}{2} \int \frac{2u}{1+u^2} du = -\ln|1+u| + \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + K$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \ln(1+\tan^2 x) - \ln|1+\tan x| + K \quad | K \in \mathbb{R}$$

9) $F(x) = \int x \tan^2 x dx$, on fait une intégration par parties.

$$F(x) = \int \underbrace{x}_{u'} \underbrace{\tan^2 x}_{v'} dx$$

$$\begin{cases} u = x & \Rightarrow u' = 1 \\ v' = \tan^2 x & \Rightarrow v = \tan x - x \end{cases}$$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

$$= x(\tan x - x) - \int \tan x - x dx$$

$$= x \cdot \tan x - x^2 - \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + K \quad \left(\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \right)$$

$$\Rightarrow F(x) = \int x \tan^2 x dx = x \tan x - \frac{x^2}{2} - \ln|\cos x| + K \quad | K \in \mathbb{R}$$

10) $F(x) = \int x^2 \sinh x dx$, (intégration par parties)

$$F(x) = \int \underbrace{x^2}_{u'} \underbrace{\sinh x}_{v'} dx$$

$$\begin{cases} u = x^2 & \Rightarrow u' = 2x \\ v' = \sinh x & \Rightarrow v = \cosh x \end{cases}$$

$$= x^2 \cosh x - \int 2x \cosh x dx$$

$$= x^2 \cosh x - \left[2x \sinh x - \int 2 \sinh x dx \right]$$

$$= x^2 \cosh x - 2x \sinh x + 2 \cosh x + K$$

$$\Rightarrow F(x) = \int x^2 \sinh x dx = (2+x^2) \cosh x - 2x \sinh x + K \quad | K \in \mathbb{R}$$

11) $F(x) = \int (1+2x) \operatorname{arctg} x \, dx$

On fait une intégration par parties.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int \underbrace{(1+2x)}_{v'} \underbrace{\operatorname{arctg} x}_u \, dx \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow u' = \frac{1}{1-x^2} \\ v' = 1+2x \Rightarrow v = x+x^2 \end{array} \right. \\
 &= (x+x^2) \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x+x^2}{1-x^2} \, dx \quad \left(\frac{x(x+1)}{(1-x)(1+x)} = \frac{x}{1-x} \right) \\
 &= (x+x^2) \operatorname{arctg} x + \int \frac{x}{x-1} \, dx \quad \left(\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} \right) \\
 &= (x+x^2) \operatorname{arctg} x + \int 1 + \frac{1}{x-1} \, dx \\
 F(x) &= (x+x^2) \operatorname{arctg} x + x + \ln|x-1| + K, \quad |K \in \mathbb{R}|
 \end{aligned}$$

12) $F(x) = \int \operatorname{tg}^3 x \, dx$

(Exos)

$$= \int \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) - \operatorname{tg} x \, dx$$

On pose $u = \operatorname{tg} x \Rightarrow du = (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = (1 + u^2) dx$
 $\Rightarrow dx = \frac{du}{1+u^2}$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx - \int \operatorname{tg} x \, dx \\
 &= \int u \, du - \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \quad \left(\int \frac{f'}{f} = \ln|f| \right) \\
 &= \frac{u^2}{2} - \ln|\cos x| + K \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + K
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + K, \quad |K \in \mathbb{R}|$$

13) $F(x) = \int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$, on pose $u = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} u$ et $dx = \frac{du}{1+u^2}$

(Exos)

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int \frac{1}{1+u} \cdot \frac{1}{1+u^2} \, du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u} \, du - \frac{1}{2} \int \frac{u}{u^2+1} \, du + \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u^2} \\
 &= \frac{1}{2} \ln|1+u| - \frac{1}{4} \ln(u^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u + K
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{1}{2} \ln|1 + \operatorname{tg} x| + \frac{1}{2} \ln|\cos x| + \frac{x}{2} + K, \quad |K \in \mathbb{R}|$$

Exo 5: Calculer les primitives des fractions rationnelles.

1) $F(x) = \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$.

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples

$$\begin{aligned} \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} &= x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} \\ &= x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)} \\ &= x^2 + x + 4 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x^5 + x^4 - 8 \\ - (x^5 - 4x^3) \\ \hline x^4 + 4x^3 - 8 \\ - (x^4 - 4x^2) \\ \hline 4x^3 + 4x^2 - 8 \\ - (4x^3 - 16x) \\ \hline 4x^2 + 16x - 8 \end{array}$$

Alors: $F(x) = \int \left(x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2} \right) dx$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \ln|x| + 5 \ln|x-2| - 3 \ln|x+2| + K.$$

$\Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left(x^2 \cdot \frac{|x-2|^5}{|x+2|^3} \right) + K \mid K \in \mathbb{R}$

2) $F(x) = \int \frac{x+3}{(x^2+1)(x-2)^2} dx$, on décompose la fraction rationnelle, en éléments simples dans $\mathbb{R}(x)$.

On a: $\frac{x+3}{(x^2+1)(x-2)^2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$

Après les calculs on trouve $a = -\frac{27}{25}$, $b = 1$, $c = \frac{7}{25}$, $d = -\frac{1}{25}$

Alors: $F(x) = a \int \frac{1}{x-2} dx + b \int \frac{-1}{(x-2)^2} dx + \frac{c}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + d \int \frac{dx}{1+x^2}$

$F(x) = a \ln|x-2| - b \frac{1}{(x-2)} + \frac{c}{2} \ln(x^2+1) + d \operatorname{arctg} x + K.$

$$= -\frac{27}{25} \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + \frac{7}{50} \ln(x^2+1) - \frac{1}{25} \operatorname{arctg} x + K \mid K \in \mathbb{R}$$

$$3) \quad F(x) = \int \frac{10}{(x^2 + 4x + 5)^3} dx$$

On a: $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$.

On pose $t = x + 2 \Leftrightarrow x = t - 2$ et $dx = dt$.

Ans: $\int \frac{10}{(x^2+4x+5)^3} dx = 10 \int \frac{1}{(t^2+1)^3} dt = 10 I_3$

Pour calculer I_3 on pose $I_n = \int \frac{dx}{(t^2+1)^n}$, et on va établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} en utilisant une intégration par parties.

On pose $u = \frac{1}{(t^2+1)^n} \Rightarrow u' = -\frac{2nt}{(t^2+1)^{n+1}}$

$$V' = 1 \Rightarrow V = t$$

$$\text{Also: } I_n = \int \frac{1}{(t^2+1)^n} dt = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \int \frac{(t^2+1) - 1}{(t^2+1)^{n+1}} dt$$

$$= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \int \frac{dt}{(t^2+1)^n} - 2n \int \frac{dt}{(t^2+1)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n I_n - 2n I_{n+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{I}_{n+1} = \frac{t}{2n(t^2+1)^n} + \left(\frac{2n-1}{2n}\right) \bar{I}_n}$$

$$\text{Dnc: } I_3 = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \left(\frac{4-t}{4}\right) I_2 = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4} I_2$$

$$\text{er } \overline{I}_2 = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \overline{I}_1$$

$$\text{or } I_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctg t + K.$$

Also: $\underline{I_3 = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3t}{8(t^2+1)} + \frac{3}{8} \arctan t + K.}$

Finalement: $F(x) = 10 \mathbb{I}_3$ et $t = x + 2$

$$F(x) = \frac{5}{2} \frac{(x+2)}{(x^2+4x+5)^2} + \frac{15}{4} \frac{(x+2)}{(x^2+4x+5)} + \frac{15}{4} \arctan(x+2) + K, K \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 4) F(x) &= \int \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-1)-1}{(x^2-x+1)^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2} \quad \left(\int \frac{f'}{f^2} = -\frac{1}{f} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{(x^2-x+1)} \right) - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left((x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \right)^2}
 \end{aligned}$$

$$J = \int \frac{dx}{\left[\frac{3}{4} \left(\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right) \right]^2} = \frac{16}{9} \int \frac{dx}{\left(\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right)^2}$$

On pose $t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{2} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2} dt$

$$\text{Alors } J = \frac{16 \cdot \sqrt{3}}{9 \cdot 2} \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{8\sqrt{3}}{9} I_2 \quad t_9$$

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{I_2}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + K$$

Finalement et en revenant à la variable x , on trouve

$$F(x) = \frac{-1}{2(x^2-x+1)} - \frac{4\sqrt{3}}{9} \cdot \left(\frac{\frac{2x-1}{\sqrt{3}}}{2 \left(\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right)} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + K$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{-1}{2(x^2-x+1)} - \frac{2x-1}{6(x^2-x+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + K \quad K \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 5) F(x) &= \int \frac{dx}{1+\cos(2x)} & / \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 \\
 &= \int \frac{dx}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \left[\frac{1}{2} \operatorname{tg} x + K \right] \quad K \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) F(x) &= \int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2 \cos x} dx, \text{ on pose } u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx \\
 \Rightarrow F(x) &= \int \frac{-du}{u(1+u)^2} \quad \left(\frac{-1}{u(1+u)^2} = \frac{a}{u} + \frac{b}{1+u} + \frac{c}{(1+u)^2} \right) \\
 &= \int \frac{-du}{u} + \int \frac{du}{1+u} + \int \frac{du}{(1+u)^2} \quad (a=-1, b=1, c=1) \\
 &= -\ln |u| + \ln |1+u| - \frac{1}{1+u} + K = \ln \left| \frac{1+u}{u} \right| - \frac{1}{1+u} + K \\
 \Rightarrow F(x) &= \ln \left| \frac{1+\cos x}{\cos x} \right| - \frac{1}{1+\cos x} + K \quad K \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

✓

$$7) F(x) = \int \frac{1}{1 + \sin x - \cos x} dx$$

On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{cases}$

Abs :

$$F(x) = \int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2dt}{2(t^2+t)} = \int \frac{dt}{t(t+1)} \quad \left(\frac{1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} \right)$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1}$$

$$= \ln|t| - \ln|t+1| + K$$

$$= \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| + K$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \ln \left| \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \right| + K \mid K \in \mathbb{R}}$$

Exo 6 Soit $\alpha > 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}_+^*$)

1) Pour quelle valeur de α l'intégrale $I = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx$ est-elle définie?

On a l'intégrale I est définie si $1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2 > 0, \forall x \in [0, 2\pi]$

On a: $1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}$ ($\alpha > 0$)

Comme $\frac{1+\alpha^2}{2\alpha} \geq 1$ et $\frac{1+\alpha^2}{2\alpha} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$,

alors l'intégrale I sera définie, $\boxed{\forall \alpha > 0 \text{ et } \alpha \neq 1}$

2) Calculer I , lorsqu'elle est définie

Supposons que $\alpha \neq 1$ et $x \in [0, 2\pi]$.

On a: $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a + k(\frac{b-a}{n}))$ $\begin{cases} a=0, b=2\pi \\ f(x) = \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) \end{cases}$

$\Rightarrow I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{p=1}^n \ln(1 - 2\alpha \cos(\frac{2k\pi}{n}) + \alpha^2)$

On a le polynôme $x^2 - 2\alpha \cos(\frac{2k\pi}{n})x + 1$ admet 2 racines complexes $\alpha_1 = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ et $\alpha_2 = e^{-i\frac{2k\pi}{n}}$.

Alors: $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{p=1}^n \ln(1 - 2\alpha \cos(\frac{2k\pi}{n}) + \alpha^2)$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} \ln \left[\prod_{k=1}^n (1 - 2\alpha \cos(\frac{2k\pi}{n}) + \alpha^2) \right]$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} \ln \left[\underbrace{\left(\prod_{k=1}^n (\alpha - e^{i\frac{2k\pi}{n}}) \right)}_{\alpha^n - 1} \underbrace{\left(\prod_{k=1}^n (\alpha - e^{-i\frac{2k\pi}{n}}) \right)}_{\alpha^n - 1} \right]$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} \ln (\alpha^n - 1)^2$

On a 2 cas. $\Rightarrow \boxed{I = 0}$

* Si $0 < \alpha < 1$; $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} \cdot 2 \ln |1 - \alpha^n| = 0$

* Si $\alpha > 1$; On a: $\ln(\alpha^n - 1)^2 = 2 \ln(\alpha^n - 1) = 2 \ln(\alpha^n (1 - \frac{1}{\alpha^n}))$
 $= 2 \ln(\alpha^n) + 2 \ln(1 - \frac{1}{\alpha^n})$

$\Rightarrow I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{n} (2n \ln(\alpha) + 2 \ln(1 - \frac{1}{\alpha^n}))$

$\Rightarrow \boxed{I = 4\pi \ln(\alpha)}$