NB :Ceci représente une collection d'exercices extraite de l'internet.

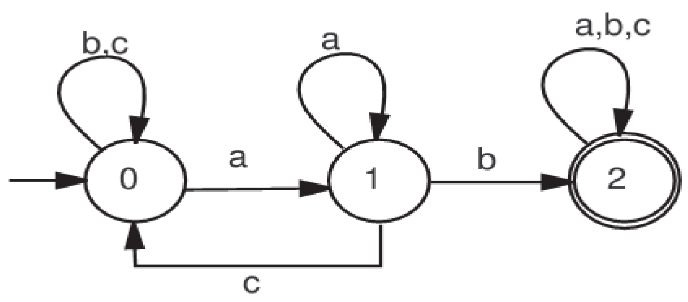
Module :Théorie de langage

Niveau :2eme Année Licence Académique « informatique »

Année universitaire :2017/2018

EXERCICE 1 :

Construire l'automate du langage complémentaire.



EXERCICE 2 : Soit la grammaire G = ({S, A} ,{a, b, c} , S , P)

où P contient les règles suivantes :

$S \rightarrow aS \mid bA$; $A \rightarrow cA \mid \varepsilon$

1) Déterminer si les mots w1 = abac, w2 = aabccc, w3 = cabbac et w4 = ab sont générés par G.
2) Trouver le langage généré par G (qu'on note L(G))

EXERCICE 3 : Soient les grammaires Gi = ({S, A, R, T} , {a, b, c} , S , Pi), (i=1,..,6) ; où les PI sont :

1) P1: $S \rightarrow aA \mid bB$; $A \rightarrow a \mid ab$; $B \rightarrow b \mid cb$
2) P2 : $S \rightarrow bA$; $A \rightarrow aA \mid \varepsilon$
3) P3 : $S \rightarrow aSc \mid A$

   $A \rightarrow bA \mid b$
4) P4 : $S \rightarrow aSbS \mid \varepsilon$
5) P5 : $S \rightarrow aRbc \mid abc$

   $R \rightarrow aRTb \mid aTb$; $Tb \rightarrow bT$; $Tc \rightarrow cc$
6) P6 : $S \rightarrow aAb \mid \varepsilon$

   $A \rightarrow aSb$

   $Ab \rightarrow \varepsilon$

I) Pour chacune des grammaires Gi (i=1,..,6) ; donner le type de celle-ci, puis trouver le langage engendré par chacune d'elles.

II) Vérifier que G2 n'est pas de type 1 ; mais que L(G2) est de type 1.

III) Montrer que L(G6) est de type 2 en trouvant une grammaire de type 2 qui l'engendre.

EXERCICE 4 : Pour chacun des langages suivants, donner une grammaire qui l'engendre :

a) $L1 = \{ 0^{2n} / \ n \geq 0 \}$

b) $L2 = \{ 0^n 1^n / \ n \geq 0 \}$

c) $L3 = \{ a^n b^{2n} / \ n \geq 0 \}$

d) $L4 = \{ a^n b^m / \ n \leq m \leq 2n \}$

e) $L5 = \{ 0^n w w^R 1^n / \ n \geq 0 , w \in \{a, b\}^* \}$

f) $L6 = \{ a^m b^n a^n b^m / \ n \geq 1, m \geq 1 \}$

g) $L7 = \{ w \in \{a, b\}+ / \ |w| \equiv 0[3] \}$

h) $L8 = \{ 0^i 1^j / \ i \geq j \geq 0 \}$

i) $L9 = \{ 0^i 1^j / \ i \neq j, i \geq 0, j \geq 0 \}$

j) $L10 = \{ a^{2n} / \ n \geq 0 \}$

EXERCICE 5 : Soit L un langage de type i $\in \{0, 1, 2, 3\}$. Est-il possible qu'un langage L' C L ne soit pas de type i ?

indication : on sait que le langage $\{ 0^n 1^n / \ n \geq 0 \}$ n'est pas régulier.

EXERCICE 6 : Soit le langage L défini comme suit :

$L = \{ a^{2n} b c^{2m+1} / \ n, m \geq 0 \}$.

1) Montrer que L est de type 3 en trouvant une grammaire de type 3 qui l'engendre.

2) Trouver une grammaire de type 2, et qui n'est pas de type 3, qui engendre L.

EXERCICE 7 : Soit le langage L défini comme suit :

L = ensemble de tous les mots de {0, 1}* qui contiennent un nombre pair de « 1 ».

Mêmes questions, pour L, que l'exercice 6.

EXERCICE 8 : Soit la grammaire G dont les règles de production sont :

$S \rightarrow AB \mid \varepsilon$

$A \rightarrow aAb \mid \varepsilon$

$bB \rightarrow Bbb$

$B \rightarrow \varepsilon$

1) Déterminer L(G).

2) Construire une grammaire de type 2 équivalente à G.

EXERCICE 9 : Soit la grammaire G dont les règles de production sont :

$S \rightarrow RD$

$R \rightarrow aRb \mid A$

$Ab \rightarrow bbA$

$AD \rightarrow \varepsilon$

Mêmes questions, pour G, que l'exercice 8.

EXERCICE 10 : Soit l'alphabet terminal π = {a, (,), +, *}.

Soit L le langage des expressions arithmétiques construites sur l'alphabet π.

Trouver une grammaire, de type 2, pour L.

EXERCICE 11 :

Soit la grammaire G = ({S, A, B}, {a, b}, P, S)

où P : S → aB | bA

A → a | aS | bAA

B → b | bS | aBB

1) Les mots suivants sont-ils dans L(G) ? il s'agit de : aaba, baba, babbab, abbbaa

2) Caractériser L(G).

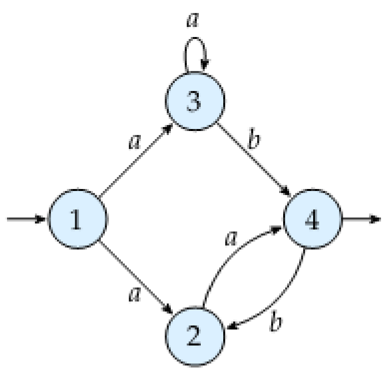
3) Écrire une grammaire G', de type 2 et équivalente à G, qui contient un seul symbole non terminal uniquement.

EXERCICE 12 :

Construire un automate d'états finis déterministe pour ab(a+b)*.

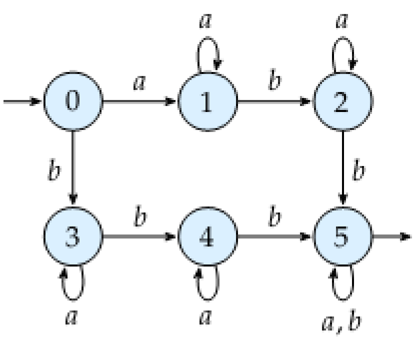
EXERCICE 13 :

Construire l'AFD de cet automate.



EXERCICE 14 :

Minimiser cet automate



EXERCICE 15 :

Construire l'AFND et l'AFD qui reconnaît les mots ayant le facteur ab.

EXERCICE 16 :

Construire L'AFND (1) qui reconnaît les mots sur {a,b,c} contenant deux a et l'AFND (2) reconnaît les mots sur {a,b,c} contenant deux b.

Construire l'automate (3) qui représente le produit des deux automates.

EXERCICE 17 :

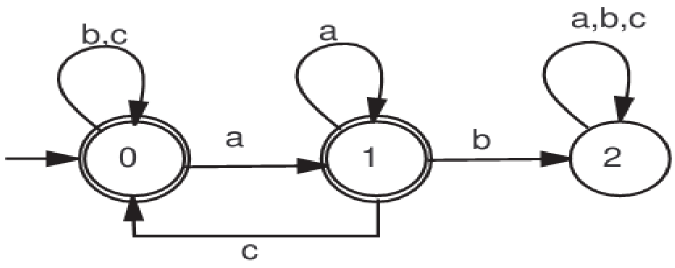
Sur l'alphabet A={0 ,1}, on considère les langages L_1 et L_2 définis par $L_1 = \{01^n / n \in N\}$

$L_2 = \{0^n1 / n \in N\}$

Définir les langages L_1L_2 , $L_{1\cap} L_2$ et L_1^2.

Solutions :

EXERCICE 1 :



EXERCICE 2 :

1) Les mot w1 et w3 ne sont pas générés par G ;
   les mots w2 et w4 sont générés par G : S ⊢ aS ⊢ aaS ⊢ aabA ⊢ aabcA ⊢ aabccA ⊢ aabcccA ⊢ w2

   et pour w4: S ⊢ aS ⊢ abA ⊢ ab = w4.

2) L(G) ={ a^nbc^m / n>=1 ,m>=0 }. En appliquant n fois la règle S → aS puis une fois la règle S → bA, puis encore m fois la règle A → cA et enfin une fois la règle A → ε.

EXERCICE 3 :

I) Nous donnons ici les types des Gi, (i=1,..,6), ainsi que les langages engendrés par les grammaires Gi

(i=1,..,6).

1) Type de G1 = 3. L(G1) = { aa, aab, bb, bcb }.

2) Type de G2 = 3. L(G2) = { $b.a^n$ / n ≥ 0 }.

3) Type de G3 = 2. L(G3) = { $a^nb^mc^n$/ n ≥ 0, m ≥ 1 }.

4) Type de G4= 2. L(G4) = { w ⍰ {a, b}* / $|w|_a = |w|_b$ et ⍰ u préfixe de w, $|u|_a \geq |u|_b$ }.

5) Type de G5 = 1. L(G5) = { $a^nb^nc^n$ / n ≥ 1 }.

6) Type de G6 = 0. L(G6) = { $a^nb^{2.[n/2]}$ / n ≥ 0} ; ([x] est la partie entière de x)

On peut aussi écrire L(G6) comme { $a^{2k+1}b^{2k}$ / k≥0 } ∪ { $a^{2k}b^{2k}$ / k≥0 }.

II) G2 n'est pas de type 1 car elle contient la règle : A → ε ; or dans les grammaires de type 1, le seul symbole qui peut produire la chaîne vide est S.

Cependant, on peut écrire une grammaire de type 1 équivalente à G2 : G2' a pour règles de production : S → Sa | b ; ce qui veut dire que L(G2) est de type 1.

III) Une grammaire de type 2 équivalente à G6 :G6' a pour règles de production : S → aaSbb | a | ε

EXERCICE 4 :

a) pour L1 : il est engendré par G1 = ({S}, {0}, S, P1), où P1 : S → 00S | ε

b) pour L2 : il est engendré par G2 = ({S}, {0, 1}, S, P2), où P2 : S → 0S1 | ε

c) pour L3: il est engendré par G3 = ({S}, {a, b}, S, P3), où P3: S → aSbb | ε

d) pour L4 : il est engendré par G4 = ({S, B}, {a, b}, S, P4), où P4 : S → aSbB | ε ; B → b | ε

e) pour L5 : il est engendré par G5 = ({S, A}, {a, b, 0, 1}, S, P5), où P5 : S → 0S1 |A ; A → aAa |bAb | ε

f) pour L6 : il est engendré par G6 = ({S, A}, {a, b}, S, P6), où P6: S → aSb |aAb ; A → bAa |ba

g) pour L7 : il est engendré par G7 = ({S, A}, {a, b}, S, P7), où P7 : S → AAAS |AAA ; A → a |b

h) pour L8 : il est engendré par G8 = ({S}, {0, 1}, S, P8), où P8 : S → 0S1 |0S | ε

i) L9 = { 0i 1j / i > j } ∪ { 0i 1j / i < j } ; L9 est engendré par G9 = ({S, S_0, S_1}, {0, 1}, S, P9),

où P9 : S → S_0 |S_1 ; S_0 → 0 $S_0$1 |0 S_0 |0 ; S1 → 0S11 |S11 |1

j) L10 : il est engendré par G10 = ({S, A, B, C, D}, {0, 1}, S, P10), où P10 : S → BCD ; C → AC | a ; Aa → aaA ;

AD → D ; Ba → aB ; BD → ε

EXERCICE 5 :

Soient les langage L = {0, 1}* et L' = { 0^n1^n / n ≥ 0 }. L est de type 3 (vérifier le !) ; mais L', qui est

inclus dans L, n'est pas de type 3 (il est de type 2).

EXERCICE 6 :

1) L peut être généré par la grammaire, de type 3, G = ({S, C}, {a, b, c}, S, P)

où P : S → aaS | bcC

C → ccC | ε

2) Une autre grammaire de type 2, et qui n'est pas de type 3, qui engendre L :

G' = ({S, A, C}, {a, b, c}, S, P')

où P' : S → AbcC

A → aaA | ε

C → ccC | ε

EXERCICE 7 :

1) L peut être généré par la grammaire, de type 3, G = ({S, A}, {0, 1}, S, P)

où P : $S \rightarrow 0S \mid 1A \mid \varepsilon$

$A \rightarrow 0A \mid 1S$

2) Une autre grammaire de type 2, et qui n'est pas de type 3, qui engendre L :

G' = ({S}, {0, 1}, S, P')

où P' : $S \rightarrow 0S \mid S1S1S \mid \varepsilon$

EXERCICE 8 :

1) L(G) = { $a^n b^m$ / $n \leq m \leq 2*n$ }

2) Grammaire à contexte libre équivalente à G : G' = ({S, B}, {a, b}, S, P')

P' : $S \rightarrow aSbB \mid \varepsilon$

$B \rightarrow b \mid \varepsilon$

EXERCICE 9 :

1) L(G) = { $a^n b^{2n}$ / $n \geq 0$} ;

2) Grammaire de type 2 équivalente à G : G' = ({S}, {a, b}, S, P')

où P' : $S \rightarrow aSbb \mid \varepsilon$

EXERCICE 10 :

Une grammaire de type 2 pour L pourrait être G = (π, N, S, P) ; où N = {S}

et P : $S \rightarrow S+S \mid S*S \mid a \mid (S)$

EXERCICE 11 :

1) aaba, , babbab ne sont pas dans L(G),

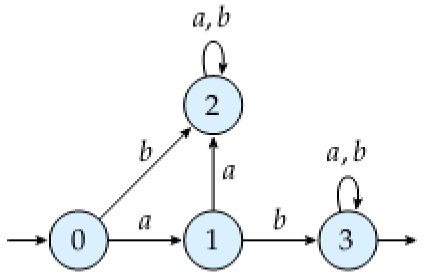
baba et abbbaa sont dans L(G) .

2) L(G) = { $w \in \{a, b\}^+$ / $|w|_a = |w|_b$ }

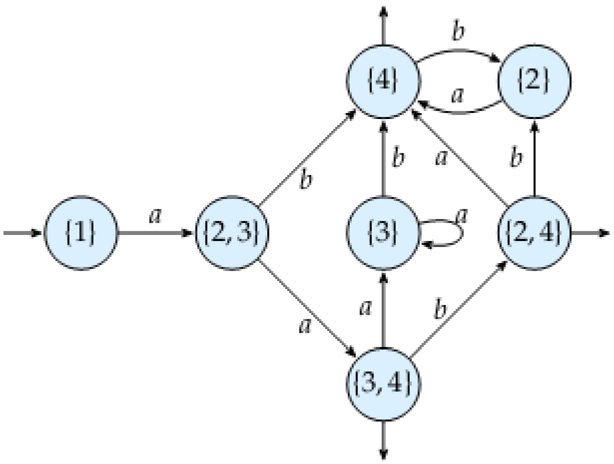
3) Soit la grammaire G' = ({a, b}, {S}, P', S)

où P : $S \rightarrow aSb \mid bSa \mid ab \mid ba \mid SS$

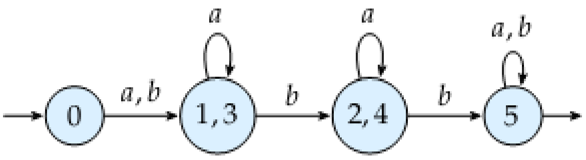
EXERCICE 12 :



EXERCICE 13 :

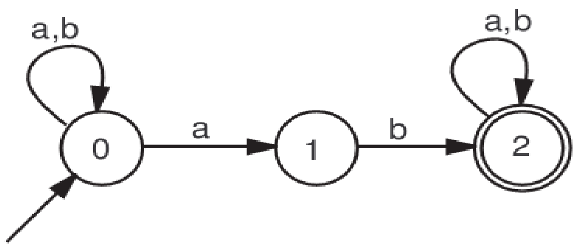


EXERCICE 14 :

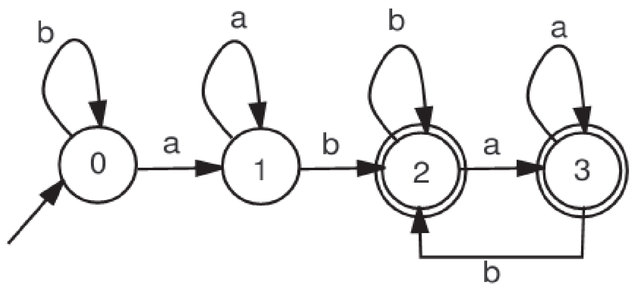


EXERCICE 15 :

L'AFND des mots contenant le facteur ab est le suivant :

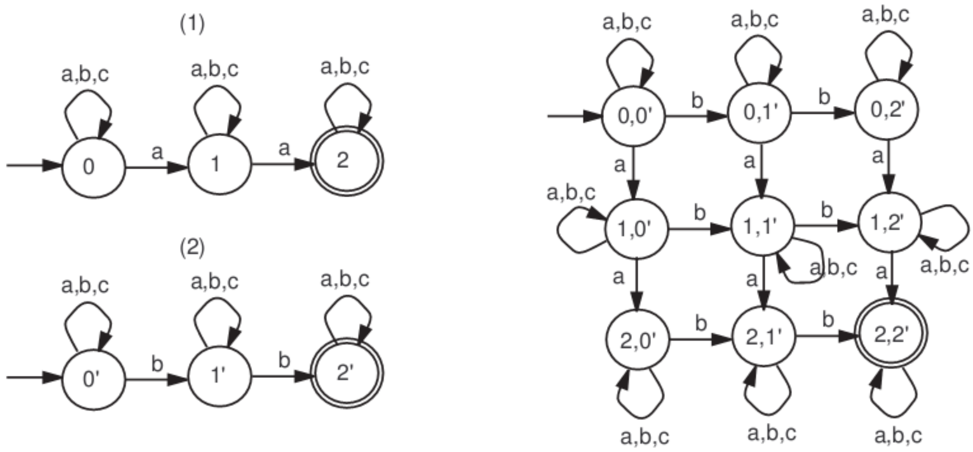


L' automate déterministe n'est pas évident à trouver mais grâce à l'algorithme de déterminisation, on peut le construire automatiquement.



EXERCICE 16 :

Dans l'automate (3), tout chemin qui mène de l'état initial vers l'état final passe forcément par deux a et deux b(tout ordre est possible). Or, ceci est exactement le langage résultant de l'intersection des deux premiers langages.



(3)

EXERCICE 17 :

$L_1 L_2 = \{01^n0^m1 \ / \ n \in N , m \in N\}$

$L_1 \cap L_2 = \{01\}$

$L_1^2 = \{01^n01^m \ / \ n \in N , m \in N \}$