École CIMPA – MADAGASCAR
Exercices sur les automates

▶ **Exercice 1** ◀ On considère l'alphabet $A = \{a, b, c\}$. Soit le mot $u = abbc$.

(a) Écrire une expression rationnelle pour le langage de tous les mots qui commencent par u (par exemple, $\underline{abbc}babbcc$ commence par u).

(b) Écrire une expression rationnelle pour le langage de tous les mots qui terminent par u (par exemple, $babbababc\underline{abbc}$ termine par u).

(c) Écrire une expression rationnelle pour le langage de tous les mots qui commencent qui contiennent u (par exemple, $bbabc\underline{abbc}bcc$ contient u).

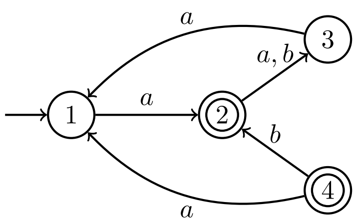
Correction :

(a) $abbc \cdot A^*$

(b) $A^* \cdot abbc$

(c) $A^* \cdot abbc \cdot A^*$

▶ **Exercice 2** ◀ On considère l'automate $\mathcal{A}$ suivant qui reconnaît $L(\mathcal{A})$:



(a) Est-il déterministe ? Est-il complet ?

(b) Donnez un mot de longueur 4 qui est reconnu par $\mathcal{A}$ et un qui n'est pas reconnu.

(c) A quoi sert l'état 4 ?

(d) Proposez un automate qui reconnaît le complémentaire de $L(\mathcal{A})$.

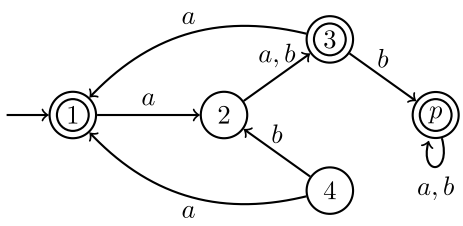
Correction :

(a) $\mathcal{A}$ est déterministe : un seul état initial, et jamais deux transitions partant d'un même sommet et étiquetées par la même lettre. Il n'est en revanche pas complet, on ne peut pas lire la lettre b depuis l'état 3.

(b) $abaa \in L(\mathcal{A})$ et $abbb \notin L(\mathcal{A})$.

(c) L'état 4 ne sert à rien car on ne peut pas l'atteindre depuis l'état initial.

(d) Il faut procéder en deux temps : compléter l'automate, puis échanger terminaux et non-terminaux. Cela donne :



▶ **Exercice 3** ◀ On se place sur $A = \{0, 1\}$.

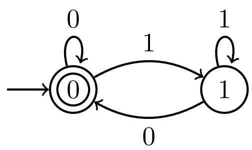
(a) Donnez un automate déterministe et complet $\mathcal{A}_2$ qui reconnaît les mots qui sont la représentation binaire d'un nombre pair.

(b) Donnez un automate déterministe et complet $\mathcal{A}_3$ qui reconnaît les mots qui sont la représentation binaire divisible par 3.

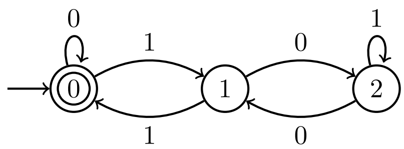
(c) Calculez l'automate produit de $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$. Quel langage reconnaît-il ?

Correction :

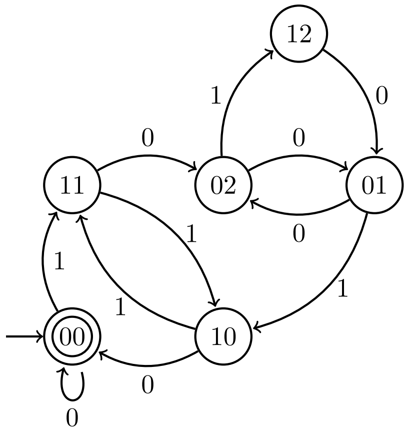
(a) On a juste besoin de tester si le mot se termine par 0 ou non. Deux états suffisent :



(b) Cet exemple a été traité dans le cours de Marion. Il suffit de garder en mémoire le reste modulo 3, et remarquer que (i) ajouter un 0 à la fin d'une écriture binaire revient à le multiplier par 2 (comme ajouter un 0 en fin d'écriture décimale revient à multiplier par 10) et (ii) ajouter un 1 à la fin d'une écriture binaire revient à le multiplier par 2 et ajouter 1. Cela donne :

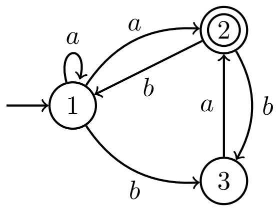


(c) On calcule l'automate produit $\mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3$:

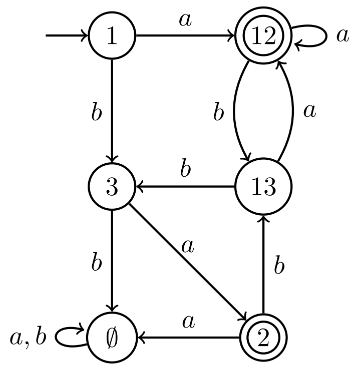


Il reconnaît les nombres divisibles à la fois par 2 et 3, c'est-à-dire les nombres divisibles par 6.

▶ **Exercice 4** ◀ Déterminisez l'automate suivant :



Correction :



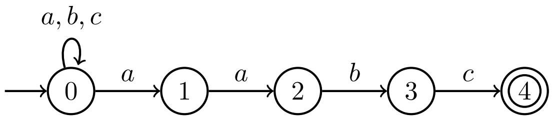
▶ **Exercice 5** ◀ On travaille sur $A = \{a, b, c\}$.

(a) Donnez un automate non-déterministe qui reconnaît tous les mots qui terminent par *aabc*.

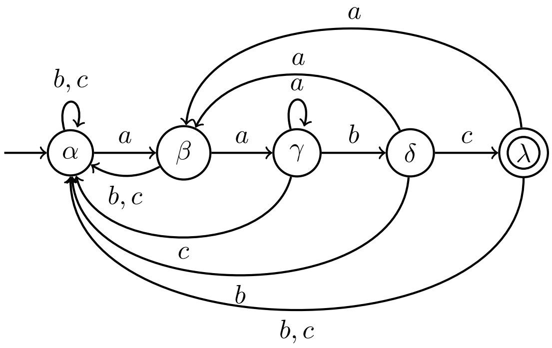
(b) Déterminisez l'automate.

Correction :

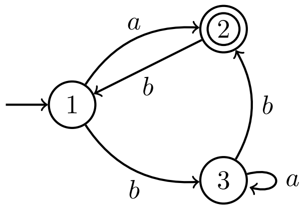
(a) Le plus simple est surement l'automate suivant :



(b) On obtient :



▶ **Exercice 6** ◀ On considère l'automate suivant :



(a) Ecrire le système d'équations sur les langages L_1, L_2 et L_3 (on rappelle que ce sont les langages reconnus si on place l'état initial en 1, 2 ou 3, respectivement).

(b) En utilisant le Lemme d'Arden sur le système, donnez une expression rationnelle pour le langage reconnu par l'automate.

Correction :

(a) En lisant directement sur l'automate :

$$\begin{cases} L_1 = a \cdot L_2 \cup b \cdot L_3 \\ L_2 = \varepsilon \cup b \cdot L_1 \\ L_3 = a \cdot L_3 \cup b \cdot L_2 \end{cases}$$

(b) Il y a plusieurs façons de faire, selon l'ordre dans lequel on traite les équations. On va commencer par appliquer le Lemme d'Arden à la dernière équation, ce qui nous donne :

$$L_3 = a^* b \cdot L_2.$$

Ensuite on injecte cette expression de L_3 dans la première équation :

$$L_1 = a \cdot L_2 \cup ba^*b \cdot L_2 = (a \cup ba^*b)L_2.$$

Comme la deuxième équation exprime L_2 en fonction de L_1 on en déduit que :

$$L_1 = (a \cup ba^*b)(\varepsilon \cup b \cdot L_1) = (ab \cup ba^*bb)L_1 \cup (a \cup ba^*b)$$

On applique une dernière fois le Lemme d'Arden :

$$L(\mathcal{A}) = L_1 = (ab \cup ba^*bb)^*(a \cup ba^*b).$$

★ Exercice 7 ★ Dans cet exercice on veut démontrer le Lemme d'Arden, dont on rappelle l'énoncé : On considère l'équation sur les langages

$$X = E \cdot X \cup F, \tag{1}$$

où E et F sont donnés (avec $\varepsilon \notin E$) et X est l'inconnue. L'équation (1) admet une unique solution qui est $X = E^*F$.

(a) Montrez que E^*F est solution de l'équation (1).

(b) Soit L une solution de l'équation, montrez que $E^nF \subset L$ pour tout $n \geq 0$. En déduire qu'on a $E^*F \subset L$.

(c) Soit L une solution de l'équation et u un mot de longueur n de L. Montrez que $u \in E^*F$. En déduire que $L \subset E^*F$.

Correction :

(a) On a

$$E \cdot E^*F \cup F = (E \cdot E^* \cup \varepsilon)F = E^*F,$$

Donc E^*F est bien solution de l'équation.

(b) Comme L est solution on a

$$\begin{aligned} L &= E \cdot L \cup F \\ &= E(E \cdot L \cup F) \cup F = E^2L \cup EF \cup F \\ &= E^3L \cup E^2F \cup EF \cup F \\ &\vdots \\ &= E^{n+1}L \cup E^nF \cup \cdots \cup EF \cup F \end{aligned}$$

Et donc, on a bien $E^nF \subset L$. Comme c'est vrai pour tout n et par définition de l'étoile, on a $E^*F \subset L$.

(c) On repart de l'équation

$$L = E^{n+1}L \cup E^nF \cup \cdots \cup EF \cup F.$$

Comme $\varepsilon \notin E$, les mots de $E^{n+1}L$ sont de longueur au moins $n+1$. Donc $u \in E^nF \cup \cdots \cup EF \cup F \subset E^*F$. Par suite E^*F contient tous les mots de L et donc $L \subset E^*F$.

★ Exercice 8 ★ Soit $\mathcal{A} = (A, Q, \delta)$ une structure de transition déterministe, c'est-à-dire un automate déterministe sans état initial, ni états terminaux. Pour tout couple d'état $p, q \in Q$, on note $L_{p,q}$ le langage reconnu en plaçant l'état initial en p et un unique état terminal en q.

(a) Montrez que $L_{p,q}$ est un langage rationnel.

(b) Soit K un langage, on note $\sqrt{K}$ le langage : $\sqrt{K} = \{u \in A^* \mid uu \in K\}$. Montrez que si K est rationnel, alors $\sqrt{K}$ aussi. *On pourra utiliser les $L_{p,q}$ d'un automate reconnaissant K.*

Correction :

(a) Par définition, $L_{p,q}$ est reconnu par l'automate $(A, Q, \delta, p, \{q\})$, il est donc rationnel.

(b) Soit $\mathcal{A} = (A, Q, \delta, q_0, F)$ un automate déterministe qui reconnait K. On note L le langage défini par

$$L = \bigcup_{f \in F} \bigcup_{p \in Q} (L_{q_0,q} \cap L_{q,f})$$

Comme L est une union d'intersections de $L_{p,q}$, il est rationnel. On va montrer que $L = \sqrt{K}$ par double inclusion :

• $\sqrt{K} \subset L$: pour tout $u \in \sqrt{K}$, on a $uu \in L$, donc uu étiquette un chemin de l'état initial q_0 à un certain état terminal que l'on va noter f. Le long de ce chemin, après avoir lu le préfixe u de uu, on arrive dans un certain état que l'on note q. Schématiquement :

$$q_0 \xrightarrow{u} q \xrightarrow{u} f$$

On en déduit que $u \in L_{q_0,q}$ et $u \in L_{q,f}$, et donc que $u \in L$.

• $L \subset \sqrt{K}$: soit $u \in L$. Il existe donc $q \in Q$ et $f \in F$ tels que $u \in L_{q_0,q} \cap L_{q,f}$. Cela signifie que u étiquette un chemin de q_0 à q et de q à f. Par suite uu est reconnu par $\mathcal{A}$, et est donc dans K. Ce qui prouve que $u \in \sqrt{K}$.
