Calcul intégral et formes différentielles

Nabil Beroual

Département de Mathématiques
Université Ferhat Abbas-Sétif1

Mai 2020

Definition

On appelle pavé de $\mathbb{R}^n$, $(n \in \mathbb{N})$, une partie D de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$D = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

Si $n = 2$, l'ensemble

$$\begin{aligned} D &= [a, b] \times [c, d] \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\right\}, (a, b, c \text{ et } d \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

est un rectangle.

On définit les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
f &: [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto f(x,y) \\
g &: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy \\
h &: [c,d] \longrightarrow \mathbb{R},\ y \longmapsto h(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx
\end{aligned}$$

Proposition

Si $f(x, y)$ est continue sur D, alors
(i) $g(x)$ est continue sur $[a, b]$.
(ii) $h(y)$ est continue sur $[c, d]$.

Theorem (de Fubini)

Si $f(x, y)$ est continue sur D, alors

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy \qquad \text{(I)}$$

Definition

Dans le théorème précédent, le nombre dans la formule (I) s'appelle intégrale double de f sur D et on note $\int_D f$ ou $\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\,dxdy$ et par convention, on peut écrire

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy \text{ au lieu de } \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

et

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx \text{ au lieu } \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Example (1)

Calculer l'intégrale $\int_1^3 \int_1^2 \left(2x+3y^2\right) dxdy$. On a

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \left(\int_1^2 \left(2x+3y^2\right) dy \right) dx &= \int_1^3 \left(\left(2xy+y^3\right) \Big|_{y=1}^{y=2} \right) dx \\
&= \int_1^3 (2x+7)\, dx = 22
\end{aligned}$$

Example (1 suite)

De même

$$\int_1^2 \left(\int_1^3 \left(2x + 3y^2\right) dx \right) dy = \int_1^2 \left(\left(x^2 + 3xy^2\right) \Big|_{x=1}^{x=3} \right) dy$$
$$= \int_1^2 \left(8 + 6y^2\right) dy = 22$$

D'après cet exemple, on voit bien que l'ordre dans lequel on effectue les intégrations n'a pas d'importance.

Example (2)

Dans cet exemple, on va constater qu'un ordre d'intégration sera plus avantageux que l'autre.

Calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi}\int_1^2 \cos(x - e^y)\, dxdy$.

- Il est plus diffcile de commencer par le calcul de $\int_1^2 \cos(x - e^y)\, dy$.
- Par contre il est plus facile de commencer par le calcul de $\int_0^{2\pi} \cos(x - e^y)\, dx$.

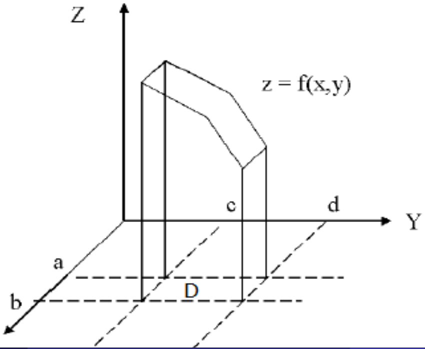
Example (2 suite)

En effet :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_1^{2} \cos\left(x - e^y\right) dxdy &= \int_1^{2} \left(\int_0^{2\pi} \cos\left(x - e^y\right) dx\right) dy \\
&= \int_1^{2} \left(\sin\left(x - e^y\right) \Big|_{x=0}^{x=2\pi}\right) dy \\
&= \int_1^{2} \left(\sin\left(2\pi - e^y\right) - \sin\left(0 - e^y\right)\right) dy \\
&= \int_1^{2} \left(-\sin e^y + \sin e^y\right) dy = 0
\end{aligned}$$

L'interprétation géométrique de l'intégrale double

On suppose que $f(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in D = [a,b] \times [c,d]$. On a $\int_D f$ ou $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dxdy$ est le volume (dans $\mathbb{R}^3$) de l'ensemble $\{(x,y,z) : (x,y) \in D \text{ et } 0 \leq z \leq f(x,y)\}$.



- En particulier, si $f(x,y) = 1$, alors

$$\begin{aligned} \int_D 1dxdy &= \int_a^b \int_c^d dxdy \\ &= (b-a)(d-c) \\ &= \text{aire de } D \end{aligned}$$

- Si f est négative sur D, $\int_D f$ sera négative, sa valeur absolue représentera le volume de l'ensemble $\{(x,y,z) : (x,y) \in D \text{ et } f(x,y) \leq z \leq 0\}$

Propriétés

1. Si f et g sont continues sur D et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha f + \beta g$ est continue sur D et
$$\int_D (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_D f + \beta \int_D g$$
2. Si f est continue sur D, alors $|f|$ est continue sur D et
$$\left| \int_D f \right| \leq \int_D |f|$$
3. Si f est continue sur D et si $f \geq 0$, alors
$$\int_D f \geq 0 \text{ et } \int_D f = 0 \Leftrightarrow f = 0$$
4. Si f et g sont continues sur D, alors
$$f \leq g \Rightarrow \int_D f \leq \int_D g$$

Un cas particulier : Si $D = [a, b] \times [c, d]$ et $f(x, y) = g(x)\, h(y)$, $\forall (x, y) \in D$, alors

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dxdy = \left(\int_a^b g(x)\, dx \right) \left(\int_c^b h(y)\, dy \right), \text{ (variables séparables)}$$

▶ Pour $n = 3$, $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, $(a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i,\ 1 \leq i \leq 3)$, on parle dans ce cas d'intégrale triple et on note

$$\int_D f(x, y, z)\, dxdydz = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\, dxdydz$$

Et si f est continue sur D, le théorème de Fubini fournit

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{a_1}^{b_1} dx \left(\int_{a_2}^{b_2} dy \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz \right)\right)$$
$$= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} dxdy \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz \right) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_3}^{b_3} dxdz \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)\,dy \right)$$
$$= \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} dydz \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx \right) = \int_{a_1}^{b_1} dx \left(\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dydz \right)$$
$$= \int_{a_2}^{b_2} dy \left(\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dxdz \right) = \int_{a_3}^{b_3} dz \left(\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)\,dxdy \right)$$

D n'est pas un pavé
On considère le cas $n = 2$ et D un borné (fermé) de $\mathbb{R}^2$ définie par l'une des deux formes suivantes :
1ère forme :

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ et } g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\right\}$$

où g_1 et g_2 sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que : $g_1 \leq g_2$ et $0 < a < b$.
Dans ce cas si f est continue sur D le théorème de Fubini fournit

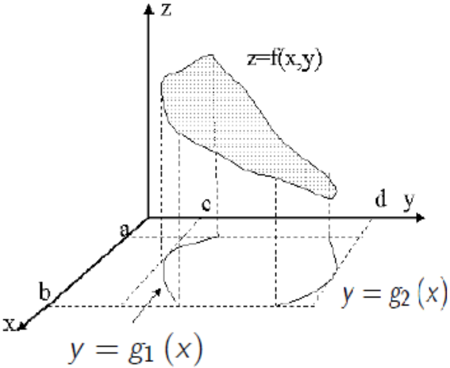
$$\int_D f = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

2ème forme :

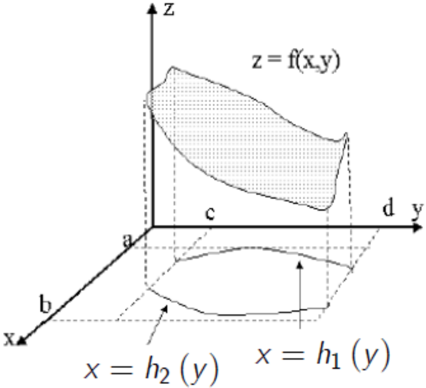
$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : h_1 \left(y \right) \leq x \leq h_2 \left(y \right) \text{ et } c \leq y \leq d \right\}$$

où g_1 et g_2 sont deux fonctions continues sur $\left[a, b\right]$ telles que : $g_1 \leq g_2$ et $0 < c < d$.
Dans ce cas si f est continue sur D le théorème de Fubini fournit

$$\int_D f = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f \left(x, y \right) dx \right) dy$$



z
z=f(x,y)
c
d
y
a
b
x
$y = g_2(x)$
$y = g_1(x)$



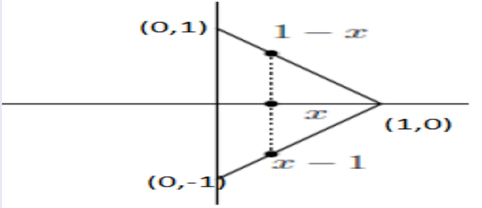
z
z = f(x,y)
c
d
y
a
b
x
$x = h_2(y)$
$x = h_1(y)$

Example

Calculer $\int_D (x^2 + y^2)\, dxdy$ où D est le triangle de sommets $(0,1)$, $(0,-1)$ et $(1,0)$.

Solution

1ère étape : Représenter graphiquement D.



Solution (suite)

2ème étape : Analytiquement D est défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \; et \; x - 1 \leq y \leq 1 - x\}$$

3ème étape : calcul de l'intégrale.

$$\begin{aligned}
\int_D (x^2 + y^2)\, dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{1-x} (x^2 + y^2)\, dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=x-1}^{y=1-x} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{8}{3}x^3 + 4x^2 - 2x + \frac{2}{3} \right) dx = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Changements de variables dans les intégrales multiples

On cherche à calculer $\int_D f$ par changement de variables où D est un domaine de $\mathbb{R}^n$ (pavé ou non).
Posons $x = \phi(u)$ où ϕ est une application définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\phi(\Omega) \subset D$.
On a

$$\phi : \underset{u \to \phi(u) = x}{\Omega \to \mathbb{R}^n} \text{et } f : \underset{x \to f(x)}{D \to \mathbb{R}} \text{ d'où } f \circ \phi : \underset{u \to f \circ \phi(u)}{\Omega \to \mathbb{R}}$$

Si $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ et $\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)$, on a

$$x = \phi(u) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 = \phi_1(u_1, u_2, ..., u_n), \; x_2 = \phi_2(u_1, u_2, ..., u_n), ..., \\ x_n = \phi_n(u_1, u_2, ..., u_n) \end{array} \right\}$$

On suppose que les dérivées partielles $\dfrac{\partial \phi_i}{\partial u_j}(u)$, $1 \leq i, j \leq n$ de ϕ, existent pour tout $u \in \Omega$.
Rappelons que le jacobien de ϕ est

$$\det J_u(\phi) = \det\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial u_j}(u)\right)_{1\leq i,j\leq n} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2}(u) & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_n}(u) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2}(u) & \dots & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_n}(u) \\ . & . & \dots & . \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial \phi_n}{\partial u_2}(u) & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial u_n}(u) \end{vmatrix}$$

Dans le cas n=2, on note $\phi(u,v) = (x,y)$ et on a

$$\begin{aligned}
\det J_{(u,v)}(\phi) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} \\
&= \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u,v) . \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u,v) . \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u,v)
\end{aligned}$$

Theorem (de changement de variable)

Si $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *est une bijection de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *telle que :* $\det J_{(u,v)}(\phi) \neq 0$ *et* $f : D \to \mathbb{R}$ *est intégrable sur* D *(avec* $\phi(\Omega) \subset D \subset \mathbb{R}^2$*) alors* $(f \circ \phi) . \left| \det J_{(u,v)}(\phi) \right|$ *est intégrable sur* Ω *et on a*

$$\int_D f(x,y)\, dxdy = \int_\Omega (f \circ \phi)(u,v) . \left| \det J_{(u,v)}(\phi) \right| dudv$$

Example

Calculer $I = \int_D (x-1)^2 \, dxdy$ sur le domaine

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x+y \leq 1, -2 \leq x-y \leq 2 \right\}$$

Solution

Posons $u = x+y$ *et* $v = x-y$. *Le domaine* Ω *est donc le rectangle*

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq u \leq 1, -2 \leq v \leq 2 \right\} \\ &= [-1,1] \times [-2,2] \end{aligned}$$

Le changement de variables est donné par

$$\phi(u,v) = (x,y) \text{ où } x = \frac{u+v}{2} \text{ et } y = \frac{u-v}{2}$$

Intégrales multiples

Solution (suite)

Le jacobien de ce changement de variables est

$$\det J_{(u,v)}(\phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

D'où (d'après le théorème)

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} \left(\frac{u+v}{2} - 1\right)^2 \left|-\frac{1}{2}\right| dudv \\ &= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} (u+v-2)^2 \, dudv = \frac{136}{3} \end{aligned}$$

Example (Changement de variable en coordonnées polaires)

Calculer $I = \int_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy$ sur le domaine

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\right\}$$

Solution

D représente le quart de la partie (anneau) comprise entre les deux cercles centrés à l'origine et de rayons 1 et 2. Posons $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$ *tels que* $r > 0$ *et* $\theta \in [0, 2\pi[$. *Dans le plan* (r,θ), *le domaine* Ω *est le rectangle* $\Omega = \left\{(r,\theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\} = [1,2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Le changement de variables en coordonnées polaires est donné par

$$\phi(r,\theta) = (x,y) \;\; \textit{où } x = r\cos\theta \textit{ et } y = r\sin\theta$$

Solution (suite)

Le jacobien de ce changement de variables est

$$\det J_{(r,\theta)}(\phi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r > 0$$

D'où (d'après le théorème)

$$\begin{aligned} I &= \int_D \frac{1}{x^2+y^2} dxdy = \int_1^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r^2} |r| \, drd\theta \\ &= \int_1^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r} drd\theta = \int_1^2 \frac{dr}{r} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2} \ln 2 \end{aligned}$$