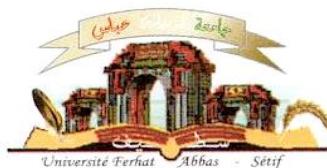


الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Ferhat Abbas Sétif 1  
Faculté des Sciences



جامعة فرhat عباس، سطيف 1  
كلية العلوم

**SUPPORT DE COURS  
Méthodes numériques et programmation**

Conforme au programme de la 2ème année physique

**Par : Dr. ZIADI Raouf**

[raouf.ziadi@univ-setif.dz](mailto:raouf.ziadi@univ-setif.dz)

**2019/2020**

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Intégration Numérique</b>	<b>5</b>
1.1	Méthode du point milieu . . . . .	6
1.1.1	Généralisation de la méthode du point milieu . . . . .	6
1.2	Méthode de Trapèze . . . . .	8
1.2.1	Généralisation de la méthode de Trapèze . . . . .	9
1.3	Méthode de Simpson . . . . .	13
1.3.1	Généralisation de la méthode de Simpson . . . . .	14
1.4	Exercices supplémentaires . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Interpolation polynomiale</b>	<b>26</b>
2.1	Interpolation de Lagrange . . . . .	27
2.2	Interpolation d’Hermite . . . . .	29
2.3	Exercices supplémentaires . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Résolution numériques des équations non linéaires <math>f(x) = 0</math></b>	<b>37</b>
3.1	Séparation des racines . . . . .	38
3.2	Méthode de bisection (ou dichotomie) . . . . .	40
3.3	Méthode de Lagrange . . . . .	43
3.4	Méthode de Newton-Raphson . . . . .	47
3.5	Exercices supplémentaires . . . . .	49

<b>4 Résolution numériques des équations différentielles ordinaires</b>	<b>59</b>
4.1 Problème de Cauchy . . . . .	60
4.2 Méthode d'Euler . . . . .	61
4.3 Méthode d'Euler améliorée . . . . .	65
4.4 Méthode de Runge–Kutta . . . . .	66
4.4.1 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (Heun) . . . . .	66
4.4.2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 . . . . .	67
4.5 Exercices supplémentaires . . . . .	70
<b>5 Résolution numériques des systèmes d'équations linéaires</b>	<b>78</b>
5.1 Méthode de Jacobi . . . . .	81
5.2 Méthode de Gauss-Seidel . . . . .	84
5.3 Exercices supplémentaires . . . . .	87
<b>Bibliographie</b>	<b>92</b>

# Introduction

Les ingénieurs rencontrent sans cesse des problèmes concrets qui surgissent dans leurs domaines. La plupart de ces problèmes peuvent être formulés comme des problèmes de mathématiques (tel que la résolution d'une équation, calcule intégrale, etc.), et la plus part de ces problèmes ne sont pas résolvables par les méthodes analytiques traditionnels connues, ou bien on est convaincu qu'on passera un temps énorme pour les résoudre analytiquement si ce n'est pas possible, c'est à cause on a alors recours aux méthodes numériques.

Prenons par exemple l'intégrale suivant :

$$\int_{-2}^3 e^{-x^2} dx,$$

cette intégrale ne peut pas être calculée avec les méthodes classiques connues comme intégration par parties, changement de variable, etc.. En utilisant l'une des méthodes numériques, ce type d'intégration on peut l'approximer numériquement avec une précision donnée.

Au cours de ces dernières décennies, de nombreux algorithmes basés sur une étude théorique ont été développés pour résoudre des problèmes mathématiques très divers. Due au fait que, ce cours s'adresse particulièrement aux étudiants 2-ème année physique et chimie, qui ne sont pas des spécialistes en mathématiques, avec un volume horaire 1h30 de cours et 1h30 de TP par semaine, cela ne permettent pas de donner plus des détails sur

le côté théorique des méthodes présentés. Dans ce polycopié de cours, nous avons décrit les méthodes numériques les plus connues et les plus utilisées pour résoudre pas mal de problèmes rencontrés au cours de leur formation, en se basant sur la simplicité dans la présentation de ces méthodes.

Dans ce fascicule, chaque section est suivie d'exemples détaillée et dans chaque fin de chapitre, les étudiants sont invités à résoudre les exercices supplémentaires donnés. Le cours est structuré en cinq grands chapitres : Le premier chapitre est consacré à l'intégration numérique. Dans le second chapitre, on traite deux méthodes d'interpolation polynomiale. Le troisième chapitre est consacré à la résolution numérique des équations non-linéaires. Le chapitre suivant, mis en lumière les techniques de résolution numériques d'équations différentielles ordinaires. Enfin, le dernier chapitre est dédié aux méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires.

# Chapitre 1

## Intégration Numérique

Très souvent le calcul explicite de l'intégrale, d'une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ , définie par  $I(f) = \int_a^b f(x)dx$  peut être très couteux, ou tout simplement impossible à atteindre. Donc, on fait appel à des méthodes numériques, afin de calculer une approximation de  $I(f)$ . Dans ce chapitre, nous allons présenter trois méthodes d'intégration usuelles qui sont : Méthode des points milieux, Méthode des trapèzes et Méthode de Simpson. Ces méthodes permettent le calcul des intégrales qui n'ont pas de solutions directes ou analytiques. On peut aussi calculer l'intégrale d'une fonction donnée sous forme tabulaire ou discrète.

L'idée consiste à approcher  $I(f)$  par une combinaison linéaire finie :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n \lambda_i^n f(x_i),$$

où :  $x_i \in [a, b]$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  (indépendantes de  $f$ ), et l'erreur de calcul de cette approche :

$$\mathcal{R}_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^n \lambda_i^n f(x_i)$$

**Définition 1.1.** *On dit qu'une méthode d'intégration numérique est exacte sur l'ensemble*

$E$ , si et seulement si :  $\mathcal{R}_n(f) = 0, \forall f \in E$ .

## 1.1 Méthode du point milieu

La formule classique de la méthode du point milieu (ou du rectangle) est obtenue en remplaçant  $f$  par sa valeur au milieu de l'intervalle  $[a, b]$  (Voir Figure 1.1).

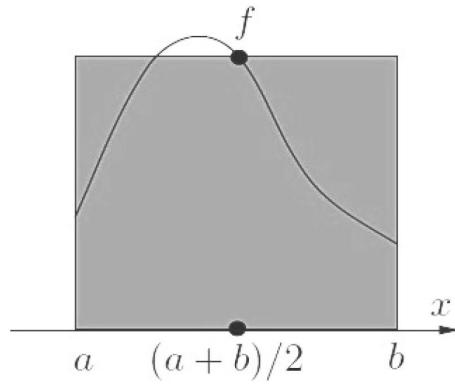


FIGURE 1.1 – Formule du point milieu

La formule de point milieu simple est obtenue en utilisant la formule suivante sur l'intervalle  $[a, b]$  :

$$I(f) = (b - a)f\left(\frac{b - a}{2}\right)$$

### 1.1.1 Généralisation de la méthode du point milieu

La méthode du point milieu composite est obtenue en subdivisant l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  sous-intervalles  $I_k = [x_{k-1}, x_k], k = 1, \dots, n$ , avec  $x_k = a + k \times h, k = 0, \dots, n$  et  $h = (b - a)/n$ .

En répétant pour chaque sous intervalle la formule du point milieu précédente, en posant  $\tilde{x}_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$ , l'intégrale de la fonction est alors la somme des intégrales obtenus, alors on a :

$$I(f) = h \times f(\tilde{x}_1) + h \times f(\tilde{x}_2) + \cdots + h \times f(\tilde{x}_n)$$

On obtient alors la formule générale suivante :

$$I(f) = h \times \sum_{k=1}^n f(\tilde{x}_k)$$

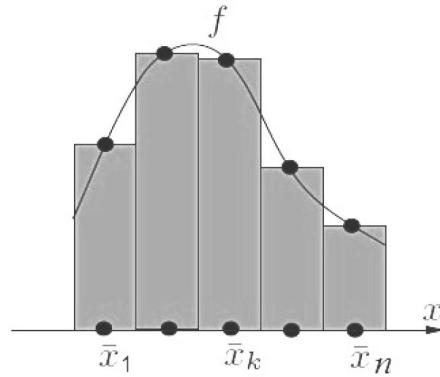


FIGURE 1.2 – Formule du point milieu composite

**Exemple** Soit à intégrer la fonction  $f(x) = 3x^2 + 2x$  dans l'intervalle  $[1, 2]$ . Cette fonction est très simple à intégrer analytiquement  $\int_1^2 f(x)dx = 10$ .

En utilisant la méthode des points milieux avec  $n = 4$ , on a :

$$h = \frac{2-1}{4} = 0.25, \text{ et } \tilde{x}_1 = \frac{1+1.25}{2} = 1.1250, \tilde{x}_2 = 1.3750, \tilde{x}_3 = 1.6250, \tilde{x}_4 = 1.8750.$$

Donc,

$$I(f) = 0.25[f(1.1250) + f(1.3750) + f(1.6250) + f(1.8750)] = 9.9844$$

On augmentant  $n$  à 8 on va avoir  $h = 1/8 = 0.125$  on obtient le nouveau intégrale :

$$\begin{aligned} I(f) &= 0.125[f(1.0625) + f(1.1875) + f(1.3125) + f(1.4375) + f(1.5625) + \\ &\quad + f(1.6875) + f(1.8125) + f(1.9375)] = 9.9961 \end{aligned}$$

et avec  $n = 100$  on obtient  $I(f) = 9.999975$

**Théorème 1.1.** Soit  $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ . Alors, il existe  $\xi \in [a, b]$  tel que :

$$\mathcal{R}_n(f) = -\frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi) = -\frac{h^2}{24n^2}(b-a)f''(\xi),$$

où  $f''$  désigne la dérivée seconde de la fonction  $f$ . On peut écrire la borne supérieure de l'erreur commise comme suit :

$$\mathcal{R}_n(f) \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

**Remarque 1.1.** Etant donnée une précision  $\varepsilon$ , on peut déterminer le nombre minimal  $n$  de sous intervalles suivant cette formule :

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|}{24\varepsilon}}.$$

## 1.2 Méthode de Trapèze

Cette formule est très simple, elle permet de remplacer la courbe  $f(x)$  de la fonction à intégrer par une ligne droite qui relie les points  $(a, f(a))$  et  $(b, f(b))$  ce qui donne un trapèze (voir Figure 1.3 au dessous).

L'intégrale est donc remplacée par la surface du trapèze :

$$I(f) \simeq S = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)].$$

On peut remarquer qu'il y a une différence importante entre la courbe de la fonction et la ligne droite, cela veut qu'on commît une erreur de calcul. Pour minimiser cette erreur, on utilise une autre forme plus adaptée de cette formule.

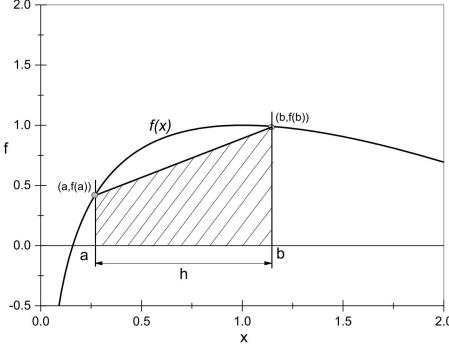


FIGURE 1.3 – Méthode du trapèze

### 1.2.1 Généralisation de la méthode de Trapèze

Pour obtenir de meilleur résultats, on découpe l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  sous-intervalles, et on applique la méthode de trapèze sur chacun d'entre eux  $[a = x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b = x_n]$ . L'application de la formule du trapèze donne :

$$\begin{aligned} I(f) &\simeq \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h}{2}(f(x_1) + f(x_2)) + \cdots + \frac{h}{2}(f(x_{n-1}) + f(x_n)) \\ &\simeq \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_i)) + f(x_n) \right] \end{aligned}$$

D'où

$$I(f) \simeq \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_i)) \right] \quad (1.1)$$

Par exemple, dans Figure 1.4, pour ces quatre trapèzes on écrira :

$$\begin{aligned} I_1(f) &= \frac{h}{2}(f(x_1) + f(a)), \\ I_2(f) &= \frac{h}{2}(f(x_1) + f(x_2)), \\ I_3(f) &= \frac{h}{2}(f(x_2) + f(x_3)), \\ I_4(f) &= \frac{h}{2}(f(x_3) + f(b)). \end{aligned}$$

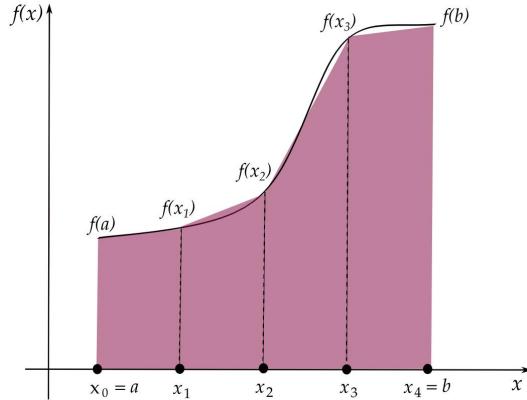


FIGURE 1.4 – Formule du Trapèze composite représentée sur 4 sous-intervalles

Donc,  $I(f) \simeq I_1(f) + I_2(f) + I_3(f) + I_4(f)$ .

**Théorème 1.2.** Soit  $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ . Alors, il existe  $\xi \in [a, b]$  tel que :

$$\mathcal{R}_n(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi) = -\frac{h^2}{12n^2}(b-a)f''(\xi),$$

où  $f''$  désigne la dérivée seconde de la fonction  $f$ . On peut écrire la borne supérieure de l'erreur commise comme suit :

$$\mathcal{R}_n(f) \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

**Remarque 1.2.** Etant donnée une précision  $\varepsilon$ , on peut déterminer le nombre minimal  $n$  de sous intervalles suivant cette formule :

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|}{12\varepsilon}}. \quad (1.2)$$

Il existe une version améliorée de la méthode des trapèzes, dite méthode de **Poncelet**

dont le schéma numérique est donné par :

$$I(f) \simeq \frac{h}{4} \left( f(x_0) + f(x_{2n}) + 7(f(x_1) + f(x_{2n-1})) + 8 \sum_{i=1}^{n-2} f(x_{2i+1}) \right)$$

**Exemple 1 :** On donne la fonction  $f(x) = \sqrt{x+1}$  avec  $x \in [0, 1]$  et  $n = 10$ . En utilisant la méthode des trapèzes, calculer l'intégrale  $\int_0^1 \sqrt{x+1} dx$  et évaluer l'erreur de calcul.

**Solution :** On calcule le pas  $h = \frac{b-a}{n} = 0.1$ .

$x_i$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(x_i)$	1	1.0481	1.0954	1.1401	1.1832	1.2247	1.2649	1.3038	1.3416	1.3784	1.4142

$$\begin{aligned} I(f) &= \frac{h}{2} \left[ f(a) + f(b) + 2 \left( \sum_{i=1}^9 f(x_i) \right) \right] \\ &= \frac{0.1}{2} [1 + 1.4142 + 2(1.0488 + 1.0954 + 1.1402 + 1.1832 + 1.2247 + 1.2649 + \\ &\quad + 1.3038 + 1.3416 + 1.3784)] \\ &= 1.2188. \end{aligned}$$

D'où,  $\int_0^1 \sqrt{x+1} dx \simeq 1.2188$ .

$\mathcal{R}_n(f) \leq \frac{1}{12 \times 10^2} \max_{x \in [0,1]} |f''(x)|$ , d'autre part, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}}, \\ f^{(3)}(x) &= \frac{3}{8}(x+1)^{-\frac{5}{2}} > 0, \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Donc,  $\max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = |f''(0)| = 0.25$ , d'où :  $\mathcal{R}_n(f) \leq 0.25 \times \frac{1}{12 \times 10^2} \simeq 2.08 \times 10^{-4}$ .

D'où,

$$\int_0^1 \sqrt{x+1} dx \simeq 1.2188 \pm 2.08 \times 10^{-4}$$

**Exemple 2 :** Calculer l'intégrale  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  avec une précision de  $10^{-3}$  par la méthode des trapèzes.

**Solution :** On doit d'abord déterminer le nombre de division  $n$  nécessaire pour obtenir cette précision.

L'erreur d'intégration s'écrit :

$$\mathcal{R}_n(f) \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| = \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \leq 10^{-3}.$$

D'autre part, on a :  $f''(x) = (4x^2 - 2) \exp(-x^2)$ , cette fonction est strictement croissante dans l'intervalle  $[0, 1]$  et  $\max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = |f''(0)| = 2$ .

Donc,  $\mathcal{R}_n(f) \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \leq 10^{-3}$ , d'où,  $h \leq \sqrt{\frac{12 \times 0.001}{(1-0) \times 2}} = 0.0774$ , donc  $n \geq \frac{1}{0.0774} = 12.91$ . On prend 13 divisions, en utilisant la même technique que dans l'exemple 1, on obtient :

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \simeq 0.74646 \pm 10^{-3}.$$

**Exemple 3 :** En utilisant la méthode des trapèzes, calculer l'intégrale  $\int_0^\pi \sin x^2 dx$  avec 5 intervalles.

- Sachant que la valeur exacte est 0.7726 ; comparer le résultat obtenu avec la valeur exacte.

**Solution :** On a  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{5}$ .

$x_i$	0	$\pi/5$	$2\pi/5$	$3\pi/5$	$4\pi/5$	$\pi$
$f(x_i)$	0	0,3846	1,0000	- 0,3999	0,0333	- 0,4303

On a aussi :

$$\begin{aligned}
 I(f) &= \frac{h}{2} \left[ f(a) + f(b) + 2 \left( \sum_{i=1}^9 f(x_i) \right) \right] \\
 &= \frac{\pi}{10} [0 - 0,4303 + 2(0,3846 + 1 - 0,3999 + 0,0333)] \\
 &= 0,5044.
 \end{aligned}$$

D'où  $\int_0^\pi \sin x^2 dx \simeq 0,5044$ .

- **Comparaison :**

On a  $\int_0^\pi \sin x^2 dx = 0.7726$ ,  $I(f) = 0,5044$  et  $|I(f) - \int_0^\pi \sin x^2 dx| = 0.2682$ .

Pour  $n = 5$ , l'erreur absolue est 0.2682 par rapport à la solution exacte.

**Exemple 4** Considérant l'intégrale définie par  $\int_1^3 1 + \log(x)$ .

- Déterminer le nombre de sous-intervalles permettant d'atteindre une erreur d'intégration inférieure à  $10^{-3}$ .

**Solution :** Afin d'atteindre une erreur  $\mathcal{R}_n(f) < 10^{-3} \iff \frac{(3-1)}{12n^2} \times 0.1111 < 10^{-3}$ , donc  $n^2 > 18.5$ , d'où  $n > 4.30$ . Il en résulte qu'à partir de cinq sous-intervalles, on atteint une erreur inférieure à  $10^{-3}$ .

### 1.3 Méthode de Simpson

Dans la formule de Simpson on ne remplace pas la fonction par une droite mais par une parabole qui doit passer par trois points  $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ , ce qui fait que cette méthode n'est applicable que pour un nombre pair de tranches, voir Figure 1.5 au dessous.

La formule de Simpson s'écrit :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{6} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

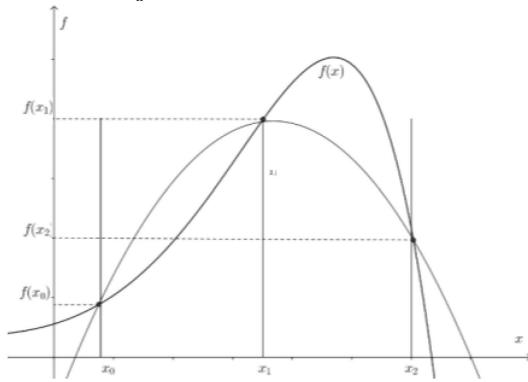


FIGURE 1.5 – Méthode de Simpson

### 1.3.1 Généralisation de la méthode de Simpson

On subdivise l'intervalle  $[a, b]$  par des points  $[x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b]$ , avec  $n$  pairs ( $n = 2k \mid k \in \mathbb{N}$ ) et  $h = \frac{b-a}{n}$ , et on applique la méthode de Simpson sur chaque intervalle de la forme  $[a, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{n-2}, b]$  (voir Figure 1.6 au dessous). Le schéma numérique de cette méthode est donné par :

$$I(f) = \frac{h}{3} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^k f(x_{2i-1}) \right]$$

Dans la figure ci-dessous, nous avons écrit la formule de Simpson sur quatre sous-intervalles. Ainsi, chaque sous-intervalle est interpolé par son polynôme de Lagrange de degré deux sur trois nœuds.

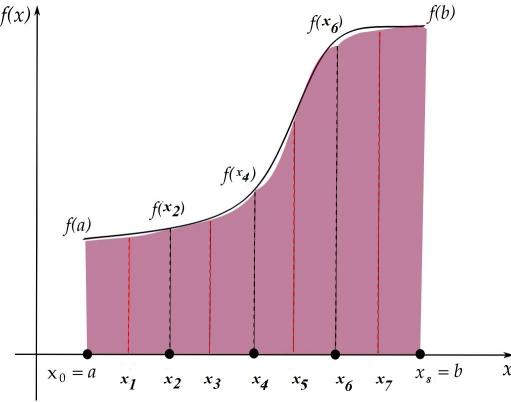


FIGURE 1.6 – Formule de Simpson composite représentée sur 4 sous-intervalles

Par exemple pour les quatre premiers sous-intervalles on écrira :

$$\begin{aligned} I_1(f) &= \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) \\ I_2(f) &= \frac{h}{3} (f(x_1) + 4f(x_3) + f(x_4)) \\ I_3(f) &= \frac{h}{3} (f(x_2) + 4f(x_5) + f(x_6)) \\ I_4(f) &= \frac{h}{3} (f(x_3) + 4f(x_7) + f(x_8)) \end{aligned}$$

Donc  $I(f) \simeq I_1(f) + I_2(f) + I_3(f) + I_4(f)$ .

**Théorème 1.3.** Soit  $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$ . Alors, il existe  $\xi \in [a, b]$  tel que :

$$\mathcal{R}_n(f) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi) = -\frac{h^4}{12n^2} (b-a) f^{(4)}(\xi),$$

où  $f^{(4)}$  désigne la quatrième dérivée de la fonction  $f$ . On peut écrire la borne supérieure de l'erreur commise comme suit :

$$\mathcal{R}_n(f) \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

**Remarque 1.3.** Soit  $\varepsilon$  la précision imposée, le nombre de sous intervalles  $n$  peut être déterminé par :

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|}{180\varepsilon}}.$$

**Exemple 1** On donne la fonction  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ ,  $x \in [0, 1]$  et  $n = 10$ . En utilisant la méthode de Simpson, calculer l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx$  et évaluer l'erreur.

**Solution** On calcule le pas  $h = \frac{b-a}{n} = 0.1$ .

$x_i$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(x_i)$	1	0.8333	0.7142	0.625	0.5555	0.5	0.4545	0.4166	0.3846	0.3571	0.3333

$$\begin{aligned} I(f) &= \frac{0.1}{3} [1 + 0.3333 + 4(0.8333 + 0.625 + 0.5 + 0.4166 + 0.3571) + 2(0.7142 + \\ &\quad + 0.5555 + 0.4545 + 0.3846)] = 0.5493 \end{aligned}$$

D'autre part, on a  $f^{(4)}(x) = \frac{384}{(2x+1)^5}$  est une fonction décroissante sur  $[0, 1]$ . Donc,

$$\max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)| = f(0) = 384.$$

D'où,

$$\mathcal{R}_n(f) \leq \frac{384}{180 \times 10^4} = 2.116 \times 10^{-4}.$$

Alors,

$$\int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx \simeq 0.5493 \pm 2.116 \times 10^{-4}.$$

**Exemple 2** Calculer l'intégrale  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  avec une précision de  $10^{-3}$  par la méthode de Simpson.

**Solution** On doit d'abord déterminer le nombre de division  $n$  nécessaire pour obtenir cette précision.

L'erreur d'intégration s'écrit :

$$\mathcal{R}_n(f) \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| = h^4 \frac{b-a}{180} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| \leq 10^{-3}.$$

On a  $f^{(4)}(x) = (16x^4 - 48x^2 + 12)e^{-x^2}$ , et  $\max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)| = f(0) = 12$ . D'où

$$h \leq \sqrt[4]{\frac{180 \times 0.001}{(1-0) \times 12}} = 0.35$$

Donc  $n = 2k \geq \frac{1}{0.35} = 2.85$ , donc  $k = 2$ , on prend 4 dévisions, le pas d'intégration  $h = \frac{1}{4} = 0.25$ . On poursuit le même processus que dans l'exemple 1 précédent on obtient :  $I(f) \simeq 0.7469$ . Donc,

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \simeq 0.7469 \pm 10^{-3}.$$

## 1.4 Exercices supplémentaires

**Exercice 1.** On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure pendant les premières 80 secondes l'accélération  $\gamma$

$t(ens)$	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$\gamma \text{en } m/s^2$	30	31.63	33.44	35.47	37.75	40.33	43.29	46.70	50.67

- Calculer la vitesse  $V$  de la fusée à l'instant  $t = 80s$ , par la méthode des trapèzes puis par la méthode de Simpson.

**Solution .**

On sait que l'accélération  $\gamma$  est la dérivée de la vitesse  $V$ , donc,

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \gamma(t) dt = 0 + \int_0^{80} \gamma(t) dt$$

- Calculons  $V(80)$  par la méthode des trapèzes, d'après le tableau des valeurs, on a  $h = 10$  et  $n = 8$ . Alors

$$\begin{aligned} V(80) &= \frac{h}{2}(\gamma(t_0) + \gamma(t_1) + \cdots + \gamma(t_7)) \\ &= 5(30 + 50.67 + 2(31.63 + 33.44 + 35.47 + 37.75 + 40.33 + 43.29 + 46.70)) \\ &= 3089m/s. \end{aligned}$$

- Calculons  $V(80)$  par la méthode de Simpson

$$\begin{aligned} V(80) &= \frac{h}{3} \left[ \gamma(t_0) + \gamma(t_k) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \gamma(t_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^k \gamma(t_{2i-1}) \right] \\ &= \frac{10}{3}(30 + 50.67 + 2(33.44 + 37.75 + 43.29) + 4(31.63 + 35.47 + 40.33 + 46.70)) \\ &= 3087m/s \end{aligned}$$

**Exercice 2.** Soit l'intégrale  $I = \int_0^\pi \sin(x)dx$ .

1. Calculer la valeur exacte de  $I$ .

2. En utilisant la méthode des trapèzes et la méthode de simpson pour  $h = \frac{\pi}{4}$  :

**a-** Calculer  $I$

**b-** Majorer l'erreur

**c-** Evaluer l'erreur

3. Donner la valeur du pas  $h$  et le nombre de subdivisions de l'intervalle  $[0, \pi]$  pour que l'erreur obtenue par la méthode de trapèzes (resp. de Simpson) soit plus petite que  $5 \times 10^{-4}$ .

**Solution .**

$$1. I = \int_0^\pi \sin(x)dx = 2.$$

2.I- La méthode des trapèzes :

a-

$$\begin{aligned}
 I(f) &= \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_i)) \right] \\
 &= \frac{\pi}{8} (f(0) + f(\pi) + 2(f(\pi/4) + f(\pi/2) + f(3\pi/4))) \\
 &\simeq 1.896.
 \end{aligned}$$

b- On a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_n(f) &\leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| = \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \\
 &\leq \frac{\pi^3}{192} \max_{x \in [0,\pi]} |\sin(x)| \leq \frac{\pi^3}{192} \simeq 0.16149.
 \end{aligned}$$

c-  $|I(f) - \int_0^\pi \sin(x)dx| = 0.1038$

2.II- La méthode de Simpson :

a-

$$\begin{aligned}
 I(f) &= \frac{h}{3} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^k f(x_{2i-1}) \right] \\
 &= \frac{\pi}{12} (f(0) + f(\pi) + 2f(\frac{\pi}{2}) + 4(f(\frac{\pi}{4}) + f(\frac{3\pi}{4}))) \simeq 2.04
 \end{aligned}$$

b- On a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_n(f) &\leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| \\
 &\leq \frac{\pi^5}{180 \times 4^4} \max_{x \in [0,\pi]} |\sin(x)| \leq \frac{\pi^5}{180 \times 4^4} \simeq 0.0066
 \end{aligned}$$

c-  $|I(f) - \int_0^\pi \sin(x)dx| = 0.004$

3. Calculons la valeur du pas  $h$  et le nombre de subdivisions  $n$  de l'intervalle  $[0, \pi]$  pour que l'erreur obtenue est plus petit que  $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$ .

3.I- La méthode des trapèze :

On a

$$\begin{aligned} n &\geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|}{12\varepsilon}} \\ &\geq \sqrt{\frac{\pi^3 \max_{x \in [0,\pi]} |\sin(x)|}{12 \times 5 \times 10^{-4}}} \simeq 71.8 \end{aligned}$$

Donc le nombre de subdivisions de l'intervalle  $[0, \pi]$  est  $n \geq 72$ .

3.II- La méthode de Simpson :

On a

$$\begin{aligned} n &\geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|}{180\varepsilon}} \\ &\geq \sqrt[4]{\frac{\pi^5 \max_{x \in [0,\pi]} |\sin(x)|}{180 \times 5 \times 10^{-4}}} \simeq 7.64116 \end{aligned}$$

Donc le nombre de subdivisions de l'intervalle  $[0, \pi]$  avec la méthode de Simpson est  $n \geq 8$ .

### Exercice 3.

a- Déterminer par la méthode des trapèzes puis par la méthode de Simpson une valeur approximative de  $\int_0^2 f(x)dx$  suivant les valeurs de ce tableau :

$x_i$	0	1/2	1	1.5	2
$y_i = f(x_i) = e^{x^2}$	1	1.284	2.718	9.487	54.598

b- Evaluer l'erreur dans chaque cas en prenant  $n = 10$ .

- c-** Quel est le nombre de points nécessaires pour atteindre une précision  $\epsilon(I) = 10^{-2}$  pour chaque méthode.

**Solution .**

a.1- Déterminons par la méthode des trapèzes une valeur approximative de  $\int_0^2 f(x)dx$ .

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx \simeq I(f) &= \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_i)) \right] \\ &= \frac{0.5}{2} [1 + 54.598 + 2(1.284 + 2.718 + 9.487)] \\ &= 20.644\end{aligned}$$

a.2-Déterminons par la méthode de Simpson une valeur approximative de  $\int_0^2 f(x)dx$ .

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx \simeq I(f) &= \frac{h}{3} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^k f(x_{2i-1}) \right] \\ &= \frac{h}{3} [f(0) + f(2) + 2f(1) + 4(f(0.5) + f(1.5))] \\ &= \frac{0.5}{3} (1 + 54.598 + 2 \times 2.718 + 4 \times (1.284 + 9.487)) \\ &= 26.0295\end{aligned}$$

b.1-Evaluons l'erreur par la méthode des trapèzes en prenant  $n = 10$ .

On a  $f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$  et  $\max_{x \in [0,2]} |f''(x)| = 982.766$ , donc

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_n(f) &\leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \\ &\leq \frac{8}{12 \times 10^2} 982.766 = 6.551\end{aligned}$$

b.2-Evaluons l'erreur par la méthode de Simpson en prenant  $n = 10$ .

On a  $f^{(4)}(x) = 12e^{x^2} + 48x^2e^{x^2} + 16x^4e^{x^2} = e^{x^2}(16x^4 + 48x^2 + 12)$  et  $\max_{x \in [0,2]} |f^{(4)}(x)| = |f^{(4)}(2)| = 39092.275$ , donc

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_n(f) &\leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| \\ &\leq \frac{2}{180 \times 10^4} 39092.275 = 0.6950\end{aligned}$$

c.2- Calculons le nombre de points nécessaires pour atteindre une précision  $\epsilon(I) = 10^{-2}$  avec la méthode des trapèzes.

On a

$$\begin{aligned}n &\geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|}{12 \varepsilon}} \\ &\geq \sqrt{982.766 \frac{2^3}{12 \times 10^2}} \simeq 256\end{aligned}$$

Donc le nombre de subdivisions de l'intervalle  $[0, 2]$  est  $n \geq 256$ .

c.1- Calculons le nombre de points nécessaires pour atteindre une précision  $\epsilon(I) = 10^{-2}$  avec la méthode de Simpson.

On a

$$\begin{aligned}n &\geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|}{180 \varepsilon}} \\ &\geq \sqrt[4]{39092.275 \frac{2^5}{180 \times 10^{-2}}} \simeq 51.344\end{aligned}$$

Donc le nombre de subdivisions de l'intervalle  $[0, 2]$  est  $n \geq 52$ .

#### Exercice 4.

a- En prenant 4 sous-intervalles, déterminer par l'algorithme des trapèzes une valeur

approximative de  $\int_0^2 \sin^2(x)dx$ , en évaluant l'erreur commise.

- b-** Quel est le nombre de points nécessaires pour atteindre une précision  $\epsilon(I) = 10^{-2}$  par la méthode des trapèzes.

**Solution .**

a- Déterminons par la méthode des trapèzes une valeur approximative de  $\int_0^2 \sin^2(x)dx$  :

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx &\simeq I(f) = \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_i)) \right] \\ &= \frac{0.5}{2} [f(0) + f(2) + 2(f(0.5) + f(1) + f(1.5))] \\ &= 1.173\end{aligned}$$

- Evaluons l'erreur par la méthode des trapèzes en prenant  $n = 4$  :

On a  $f''(x) = 2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) = 2(1 - 2\sin^2(x))$  et  $\max_{x \in [0,2]} |f''(x)| = f''(0) = f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ , donc

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_n(f) &\leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \\ &\leq \frac{8}{12 \times 4^2} 2 = 0.0833\end{aligned}$$

b- Calculons le nombre de points nécessaires pour atteindre une précision  $\epsilon(I) = 10^{-3}$  avec la méthode des trapèzes.

On a

$$\begin{aligned}n &\geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|}{12 \varepsilon}} \\ &\geq \sqrt{2 \frac{2^3}{12 \times 10^{-3}}} \simeq 36.51\end{aligned}$$

Donc le nombre de subdivisions de l'intervalle  $[0, 2]$  est  $n \geq 37$ .

**Exercice 5.** On considère l'intégrale suivante

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

1. Calculer la valeur exacte de cette intégrale.
2. Evaluer numériquement cette intégrale en utilisant :
  - la méthode des points milieux avec 5 intervalles.
  - la méthode des trapèzes avec 4 intervalles
  - la méthode de Simpson avec 2 intervalles.

**Solution abrégée .**

$$1. I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0.7854.$$

2.

- Par la méthode des points milieux, on obtient :  $I(f) = 0.8387$
- Par la méthode des trapèzes, on obtient :  $I(f) = 0.7828$
- Par la méthode de Simpson, on obtient :  $I(f) = 0.7854$

**Exercice 6.** Combien faut-il de subdivisions de  $[0, 1]$  pour évaluer  $\int_0^1 xe^{-x} dx$  à  $10^{-8}$  près en utilisant :

1. la méthode des trapèzes.
2. la méthode de Simpson.

**Solution abrégée .**

1.  $n \geq 4083$
2.  $n \geq 40$

**Exercice 7.** Trouver le nombre de subdivisions nécessaires de l'intervalle d'intégration  $[-\pi, \pi]$ , pour évaluer à  $5 \times 10^{-4}$  près, grâce à la méthode de Simpson, l'intégrale  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)dx$ .

**Solution abrégée .**

-  $n \geq 20$

# Chapitre 2

## Interpolation polynomiale

Dans la pratique on rencontre souvent des problèmes où la fonction  $f$  est inconnue explicitement mais connue seulement en certains points  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , ou évaluable uniquement au moyen de l'appel à un code couteux. Mais dans de nombreux cas, on a besoin d'effectuer des opérations (dérivation, intégration, minimisation, etc...) sur la fonction  $f$ . On cherche donc à reconstruire  $f$  par une autre fonction  $f_r$  simple et facile à évaluer à partir des données discrètes de  $f$ . On espère que le modèle  $f_r$  ne sera pas trop éloigné de la fonction  $f$  aux autres points.

On s'intéresse dans ce cours à la reconstruction de  $f$  par des polynômes. Plus précisément, étant donnés  $n + 1$  points d'abscisses distinctes  $m_i(x_i, f(x_i))$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  dans le plan, le problème de l'interpolation polynomiale consiste à trouver un polynôme  $P(x)$  dont le graphe passe par les  $n + 1$  points  $m_i$ , c'est-à-dire

$$P(x_i) = f(x_i), \forall i = 0, 1, \dots, n \quad (2.1)$$

Dans ce chapitre, on va considérer l'approximation de  $f$  par une forme polynomiale, c'est-à-dire :

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

avec  $a_i, i = 1, 2, \dots, n$  sont des coefficients à déterminer.

Les polynômes que nous allons étudier diffèrent seulement par la façon de déterminer les coefficients  $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ , car pour un tableau de valeurs données le polynôme d'interpolation est unique.

## 2.1 Interpolation de Lagrange

Soient  $(n + 1)$  points distincts  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  et  $f$  une fonction dont les valeurs sont  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ . Alors, il existe un seul polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$  et qui coïncide avec les points d'interpolation, i.e. :

$$f(x_i) = P(x_i), i = 0, 1, \dots, n.$$

Ce polynôme est donné par :

$$P(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \dots + f(x_n)L_n(x)$$

avec

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, i = 0, \dots, n.$$

Le polynôme  $P(x)$  est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction  $f$  aux points  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , et les polynômes  $L_i(x)$  sont appelés polynômes de base de Lagrange associés à ces points.

**Théorème 2.1.** (*Erreur de l'interpolation de Lagrange*).

Soit  $f \in C^{n+1}[a, b]$ , et soit  $P(x)$  le polynôme d'interpolation de  $f$  sur les points  $m_i(x_i, f(x_i))$ , pour  $i = 1, \dots, n$ . Alors pour tout  $x \in [a, b]$ , il existe  $\xi_x \in [\min_{1, \dots, n} \{x_i\}, \max_{1, \dots, n} \{x_i\}]$  tel que l'erreur

reur  $f(x) - P(x)$  soit

$$E(x) = \frac{\gamma_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x),$$

où :  $\gamma_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ . Si on pose  $M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$ , on a alors

$$|E(x)| \leq \frac{|\gamma_{n+1}(x)|}{(n+1)!} M_{n+1}$$

**Exemple 1 :** Déterminons le polynôme de Lagrange qui interpole la fonction définie par ces valeurs suivant ce tableau

$x_i$	0	2	3	5
$y_i = f(x_i)$	-1	2	9	87

On a

$$P(x) = \sum_{i=0}^3 f(x_i) L_i(x) = f(x_0) L_0(x) + f(x_1) L_1(x) + f(x_2) L_2(x) + f(x_3) L_3(x).$$

avec

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^3 \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

D'où

$$\begin{aligned} P(x) &= -\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)} + 2\frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)} + \\ &\quad + 9\frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)} + 87\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)} \\ &= \frac{53}{30}x^3 - 7x^2 + \frac{253}{30}x - 1. \end{aligned}$$

**Exemple 2 :** Construire, selon la méthode de Lagrange, le polynôme d'interpolation  $P(x)$  de degré quatre qui interpole les points  $(x_0, f(x_0)) = (0, 0)$ ,  $(x_1, f(x_1)) = (1, 5)$ ,  $(x_2, f(x_2)) = (2, 15)$ ,  $(x_3, f(x_3)) = (3, 0)$  et  $(x_4, f(x_4)) = (4, 3)$ .

On a,

$$P(x) = \sum_{i=0}^4 f(x_i)L_i(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) + f(x_4)L_4(x).$$

avec

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^4 \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

On a  $L_0(x) = L_3(x) = 0$  car ils seront multipliés par zéro dans le remplacement. En suivant la même procédure que dans l'exemple 1 on obtient :

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-3)(1-4)} = -\frac{1}{6}(x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 24x) \\ L_2(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)} = \frac{1}{4}(x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x) \\ L_3(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)} = \frac{1}{24}(x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x) \end{aligned}$$

Finalement on remplace les coefficients polynômes et on obtient :

$$f(x) \simeq P(x) = 3.0416x^4 - 23.25x^3 + 50.9583x^2 - 25.75x^4.$$

## 2.2 Interpolation d'Hermite

L'interpolation de Hermite est une généralisation de celle de Lagrange en faisant coïncider non seulement  $f(x)$  et  $P(x)$  aux noeuds  $x_i$ , mais également leurs dérivées aux noeuds  $x_i$ . Soient  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $(n+1)$  points distincts de l'intervalle  $[a, b]$  et  $f$  une fonction définie sur le même intervalle admettant les dérivées  $f'(x_0), f'(x_1), \dots, f'(x_n)$ . Dans ce cas, il existe un seul et unique polynôme de degré  $2n+1$  tel que  $P(x_i) = f(x_i)$

et  $P'(x_i) = f'(x_i)$ . Ce polynôme  $P$  s'écrit

$$P(x) = \sum_{i=0}^n H_i(x)f(x_i) + \sum_{i=0}^n K_i(x)f'(x_i)$$

avec

$$\begin{cases} H_i(x) &= [1 - 2(x - x_i)L'_i(x_i)]L_i^2(x) \\ K_i(x) &= (x - x_i)L_i^2(x) \\ \text{avec } L_i(x) &= \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \end{cases}$$

**Théorème 2.2.** (*erreur de l'interpolation d'Hermite*)

Soit  $f \in \mathcal{C}^{2n+2}[a, b]$ , et soit  $P(x)$  le polynôme d'interpolation de  $f$  sur les points  $m_i(x_i, f(x_i))$ , pour  $i = 1, \dots, n$ . Alors pour tout  $x \in [a, b]$ , il existe  $\xi_x \in [\min_{1, \dots, n}\{x_i\}, \max_{1, \dots, n}\{x_i\}]$  tel que l'erreur  $f(x) - P(x)$  soit

$$E(x) = \frac{\gamma_{n+1}^2(x)}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi_x)$$

Si on pose  $M_{2n+2} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(2n+2)}(x)|$ , on a alors

$$E(x) \leq \frac{\gamma_{n+1}^2(x)}{(2n+2)!} M_{2n+2}$$

**Exemple 1 :** Déterminons le polynôme d'Hermite qui interpole la fonction  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  aux points  $x_0 = 0$  et  $x_1 = 5$ .

Le polynôme d'Hermite  $P(x)$  s'écrit

$$P(x) = \sum_{i=0}^1 H_i(x)f(x_i) + \sum_{i=0}^1 K_i(x)f'(x_i)$$

avec

$$\begin{cases} H_i(x) = [1 - 2(x - x_i)L'_i(x_i)]L_i^2(x) \\ K_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \end{cases}$$

Calculons les polynômes  $L_i(x)$ ,  $L'_i(x)$ ,  $H_i(x)$  et  $K_i(x)$ , sachant que les abscisses des points d'appui sont  $x_0 = 0$  et  $x_1 = 5$ .

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} = 1 - \frac{x}{5}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{x}{5}$$

et

$$L'_0(x) = -\frac{1}{5}$$

$$L'_1(x) = \frac{1}{5}$$

$$H_0(x) = [1 - 2(x - x_0)L'_0(x_0)]L_0^2(x) = \left(1 - 2(x - 0)\frac{-1}{5}\right) \left(1 - \frac{x}{5}\right)^2 = \frac{2}{125}x^3 + \frac{3}{25}x^2 + 1.$$

$$H_1(x) = [1 - 2(x - x_1)L'_1(x_1)]L_1^2(x) = \left(1 - 2(x - 5)\frac{1}{5}\right) \left(\frac{x}{5}\right)^2 = -\frac{2}{125}x^3 + \frac{3}{25}x^2.$$

D'autre part,

$$K_0(x) = (x - x_0)L_0^2(x) = (x - 0) \left(1 - \frac{x}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}x^3 - \frac{2}{5}x^2 + x.$$

$$K_1(x) = (x - x_1)L_1^2(x) = (x - 5) \left(\frac{x}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}x^3 - \frac{2}{5}x^2.$$

D'où

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{i=0}^1 H_i(x)f(x_i) + \sum_{i=0}^1 K_i(x)f'(x_i) \\
&= H_0(x)f(x_0) + H_1(x)f(x_1) + K_0(x)f'(x_0) + K_1(x)f'(x_1) \\
&= \left( \frac{2}{125}x^3 + \frac{3}{25}x^2 + 1 \right) + \frac{1}{26} \left( -\frac{2}{125}x^3 + \frac{3}{25}x^2 \right) - \frac{10}{26^2} \left( \frac{1}{25}x^3 - \frac{2}{5}x^2 \right) \\
&= \frac{10}{262}x^3 - \frac{76}{262}x^2 + 1
\end{aligned}$$

## 2.3 Exercices supplémentaires

**Exercice 1 :** On suppose que  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  et que  $(x_0, f(x_0)) = (0, 0)$ ,  $(x_1, f(x_1)) = (1, 1)$  et  $(x_2, f(x_2)) = (8, 2)$ .

- 1) Déterminer le polynôme  $P_2(x)$  d'interpolation polynomiale qui passent par les points  $(x_i, y_i)_{i=0,1,2}$ .
- 2) Calculer  $P_2(x)$  et  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  pour  $x = 0.5, 0.95, 1, 1.5$  et  $3$ .

**Solution .**

1- D'après la méthode de Lagrange,

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\
&= f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\
&= 0 \frac{(x - 1)(x - 8)}{(0 - 1)(0 - 8)} + 1 \frac{(x - 0)(x - 8)}{(1 - 0)(1 - 8)} + 2 \frac{(x - 0)(x - 1)}{(8 - 0)(8 - 1)} \\
&= -\frac{3}{28}x^2 + \frac{31}{28}x
\end{aligned}$$

On a bien  $P_2(0) = 0$ ,  $P_2(1) = 1$  et  $P_2(8) = 2$ .

2-

$x_i$	0.5	0.95	1	1.5	3
$f(x_i)$	0.7937	0.98305	1	1.1447	1.4422
$P_2(x)$	0.52679	0.95509	1	1.4196	2.3571

**Exercice 2.** Soit la fonction  $f(x) = 1/x$ .

- 1- Trouver le polynôme d'interpolation de Lagrange qui passe par les points  $(2, 0.5), (2.5, 0.4)$  et  $(4, 0.25)$ .
- 2- Calculer l'approximation de  $f(2.2)$ .
- 3- Estimer l'erreur maximale.

**Solution .**

$$1- P_2(x) = \frac{1}{20}x^2 - \frac{17}{40}x + \frac{23}{20}.$$

2- On déduit que

$$f(2.2) \simeq P_2(2.2) = 0.457$$

3- L'erreur du polynôme  $P_2(x)$  : d'après Théorème 2.1, il existe  $\xi_x \in [2, 4]$  tel que ;

$$E(x) = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

donc,

$$E(x) = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!}(x - 2)(x - 2.5)(x - 4).$$

Posons  $M_3 = \max_{2 \leq x \leq 4} |f^{(3)}(x)|$ , on a alors

$$E(x) \leq \frac{M_3}{3!}|(x - 2)(x - 2.5)(x - 4)|.$$

D'autre part on a  $f^{(3)}(x) = -\frac{6}{x^4}$  et  $\max_{2 \leq x \leq 4} |f^{(3)}(x)| = \frac{3}{8}$ . Donc

$$E(x) \leq \frac{3}{48}|(x - 2)(x - 2.5)(x - 4)|.$$

Pour  $x = 2.2$  l'erreur est majorée comme suit :

$$E(x) \leq \frac{3}{48} |(2.2 - 2)(2.2 - 2.5)(2.2 - 4)| \simeq 0.0068$$

**Exercice 3.** Soit les points suivants :  $(0, 0), (1, 2), (2, 36), (3, 252), (4, 1040)$ .

- 1- Obtenir le polynôme de Lagrange passant par les 3 premiers points.
- 2- Obtenir le polynôme de Lagrange passant par les 4 premiers points.
- 3- Donner l'expression analytique de l'erreur pour les polynômes obtenus en 1) et en 2).
- 4- Obtenir des approximations de  $f(1,5)$  à l'aide des 2 polynômes obtenus en 1) et en 2).

**Solution abrégée .**

$$1- P_2(x) = 16x^2 - 14x.$$

$$2- P_3(x) = x(x-2)(x-3) - 18x(x-1)(x-3) + 42x(x-1)(x-2) = 61x^3 - 203x^2 + 144x$$

3- L'erreur du polynôme  $P_2(x)$  : d'après Théorème 2.1, il existe  $\xi_x \in [0, 2]$  tel que :

$$E_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

donc,

$$E_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!} (x - 0)(x - 1)(x - 2)$$

tandis que pour  $P_3(x)$ , il existe  $\xi_x \in [0, 4]$ , où l'erreur est donné par :

$$E_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} (x - 0)(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

4-Si on approxime  $f$  par  $P_2$  on a  $f(1.5) \simeq P_2(1.5) = 15$  et, si on approxime  $f$  par

$P_3$  on obtient  $f(1.5) \simeq P_3(1, 5) = 5.625$ .

**Exercice 4.** On souhaite concevoir un virage d'une voie de chemin de fer entre les points  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ . Le virage est décrit par une courbe de la forme  $y = f(x)$  qui satisfait :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1.$$

De plus, pour assurer une transition en douceur, la pente de la courbe doit satisfaire :

$$f'(0) = 0 \text{ et } f'(1) = 0.3.$$

On représente la courbe à l'aide d'un polynôme dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

- Construire, selon la méthode de Hermite, le polynôme d'interpolation  $P(x)$  qui interpole ces points

**Solution abrégée .**

En suivant le même schéma que dans l'exemple 1 on obtient,

$$P(x) = -1.7x^3 + 2.7x^2$$

**Exercice 5.** Soient les points suivants :  $(0, 0), (1, 2), (2, 36)$  et  $(3, 252)$ .

1. Obtenir le polynôme de Lagrange passant par les trois premiers points.
2. Obtenir le polynôme de Lagrange passant par les quatre points.

**Solution abrégée .**

$$1- P_2(x) = 16x^2 - 14x.$$

$$2- P_3(x) = 25x^3 - 59x^2 + 36x$$

**Exercice 6.** trouver le polynôme d'interpolation passant par les points  $(1, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(9, 2)$  et  $(28, 3)$ .

**Solution abrégée .**

-  $P_3(x) = x^3 + 1$

# Chapitre 3

## Résolution numériques des équations non linéaires $f(x) = 0$

On s'est habitué à résoudre aisément les équations de type  $ax^2 + bx + c = 0$  par le moyen du calcul du fameux discriminant  $\Delta$  à partir duquel on juge l'existence des racines exactes. Malheureusement ce discriminant ne sera plus rencontré s'il s'agit de l'équation de type :  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , celle-ci très fréquentée, n'admet pas de méthode de résolution analogue à la précédente.

Et si on parle d'un autre exemple d'équation de type :

$$\cos(x^3) \sin(2x^2 - 3) + 0.5 = 0,$$

on est convaincu qu'on passera un temps énorme pour la résoudre analytiquement si ce n'est pas possible. Ces types d'équations appelées équations non-linéaires (transcendante) peuvent être résolues numériquement par des méthodes permettent de calculer des racines approchées avec une précision déterminée. Dans ce chapitre on va étudier trois méthodes pour la résolution numérique des équations non-linéaires à une variable  $f(x) = 0$ .

**Définition 3.1.** *Tout nombre  $\xi$  vérifiant  $f(\xi) = 0$ , s'appelle solution (racine) de l'équation  $f(x) = 0$ . Géométriquement,  $\xi$  est l'abscisse du point d'intersection de graphe de la fonction  $f$  avec l'axe  $Ox$ .*

**Définition 3.2.** *Si l'équation  $f(x) = 0$  peut s'écrire sous cette forme*

$$f(x) = (x - \xi)^m g(x) = 0$$

*où  $g(x) \neq 0$ , alors  $\xi$  s'appelle racine d'ordre  $m$ . Si  $m = 1$ ,  $\xi$  s'appelle racine simple de l'équation  $f(x) = 0$ .*

Dans toutes les méthodes itératives, il est nécessaire, pour éviter une divergence de la solution, de déterminer un intervalle contenant la racine cherchée et de bien choisir les valeurs initiales.

### 3.1 Séparation des racines

La plupart des méthodes numériques supposent que l'on connaisse un intervalle contenant la racine cherchée et aucune autre. On dit alors qu'elle est localisée ou séparée, des autres éventuelles racines.

**Définition 3.3.** *On dit qu'une racine  $\xi$  d'une équation  $f(x) = 0$  est séparable si on peut trouver un intervalle  $[a, b]$  tel que  $\xi$  soit la seule racine de cette équation dans  $[a, b]$ . La racine  $\xi$  est alors dite séparée ou localisée.*

Les deux techniques les plus classiques pour localiser ou séparer les racines sont :

#### Méthode analytique

On se base dans ce cas sur le théorème des valeurs intermédiaires :

**Théorème 3.1.** Soit un intervalle non vide  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une application continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f(a)f(b) < 0$ . Alors il existe  $\xi \in ]a, b[$  tel que  $f(\xi) = 0$ .

**Exemple** Déterminons les racines de l'équation  $x^4 - 4x - 1 = 0$ . Les variations de la courbe représentative de la fonction  $f(x) = x^4 - 4x - 1$  sont données par le tableau des variations suivant :

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-4	$+\infty$

On a d'après le tableau des variations, la fonction  $f$  est strictement monotone sur l'intervalle  $[-1, 0] \cup [1, 2]$  avec  $f(-1).f(0) < 0$  et  $f(1).f(2) < 0$ , donc il existe deux racines  $\xi_1 \in ]-1, 0[$  et  $\xi_2 \in ]1, 2[$ .

### Méthode Géométrique (graphique)

Soit on trace (expérimentalement ou par étude des variations de  $f$ ) le graphe de la fonction  $f$  et on cherche son intersection avec l'axe  $Ox$ . Soit on décompose  $f$  en deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  simples à étudier, telles que :  $f = f_1 - f_2$ , et on cherche les points d'intersection des graphes de  $f_1$  et  $f_2$ , dont les abscisses sont exactement les racines de l'équation  $f(x) = 0$ .

**Remarque 3.1.** On choisit souvent  $f_1$  et  $f_2$  de façon à ce que leur courbes soient des courbes connues.

**Exemple.** Soit l'équation

$$x \log x = 1, x > 0. \quad (3.1)$$

Cette équation s'écrit encore sous la forme :  $\log x = \frac{1}{x}$ . En posant  $f_1(x) = \log x$ ,  $f_2(x) = 1/x$  et  $f(x) = f_1(x) - f_2(x) = \log x - 1/x$ . Les variations des fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont données par les courbes ci-dessous (Figure 3.1). L'abscisse du point d'intersection des deux courbes permet de localiser la solution de l'équation (3.1) et fournit même une (première) approximation de celle-ci.

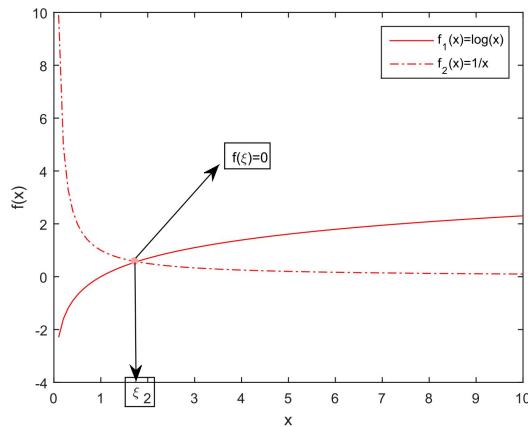


FIGURE 3.1 – Séparation graphique du racine.

## Méthodes numériques de résolution

### 3.2 Méthode de bisection (ou dichotomie)

La méthode de dichotomie (ou méthode de la bisection) suppose que la fonction  $f$  est continue sur un intervalle  $[a, b]$ , n'admet qu'un seul racine  $\xi \in ]a, b[$  et vérifie  $f(a)f(b) < 0$ .

Son principe est le suivant : on pose  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$ , on note  $x_0 = \frac{(a_0+b_0)}{2}$  le milieu de l'intervalle de départ et on évalue la fonction  $f$  en ce point. Si  $f(x_0) = 0$ , le point  $x_0$  est le racine de  $f$  et le problème est résolu. Sinon, si  $f(a_0)f(x_0) < 0$ , alors le racine  $\xi$

est contenu dans l'intervalle  $]a_0, x_0[$ , alors qu'il appartient à  $]x_0, b_0[$  si  $f(x_0)f(b_0) < 0$ . On réitère ensuite ce processus sur l'intervalle  $[a_1, b_1]$ , avec  $a_1 = a_0$  et  $b_1 = x_0$  dans le premier cas, ou  $a_1 = x_0$  et  $b_1 = b_0$  dans le second, et ainsi de suite...

De cette manière, on construit de manière récurrente trois suites  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$  et vérifiant, pour tout entier naturel  $n$ ,

- $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$
- $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = x_n$  si  $f(a_n).f(x_n) < 0$
- $a_{n+1} = x_n$  et  $b_{n+1} = b_n$  si  $f(x_n).f(b_n) < 0$

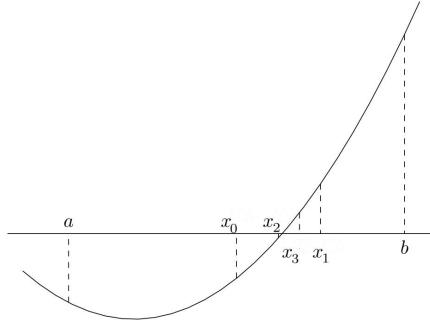


FIGURE 3.2 – Construction des premiers itérés de la méthode de dichotomie.

**Proposition 3.1.** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ , vérifiant  $f(a)f(b) < 0$ , et soit  $\xi \in ]a, b[$  l'unique solution de l'équation  $f(x) = 0$ . Alors, la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  construite par la méthode de dichotomie converge vers  $\xi$  et on a l'estimation

$$|x_n - \xi| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$$

**Remarque 3.2.** A partir de cette inégalité qui définit l'erreur, si la précision  $\varepsilon$  est connue, on peut calculer le nombre nécessaire d'itérations  $n$ . En effet :

$$\frac{b - a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \implies n \geq \frac{\ln(\frac{b-a}{2\varepsilon})}{\ln 2}$$

**Exemple 1 :** Appliquons la méthode de bisection pour calculer la racine de l'équation

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \text{ avec une précision } \varepsilon = 10^{-2}.$$

Le tableau des variations de  $f$  est

$x$	$-\infty$	$-8/3$	$0$	$+\infty$		
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$-10$	$\nearrow$	$+\infty$

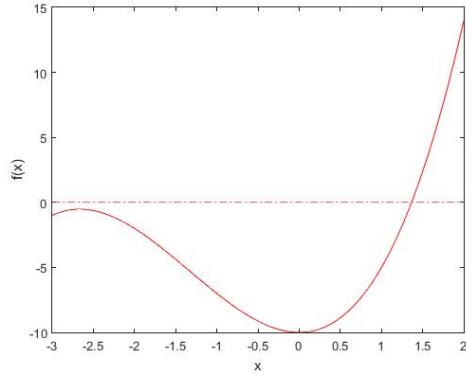


FIGURE 3.3 – Graphe de  $f$ .

D'après le tableau des variations et la Figure 3.3, et puisque on a  $f(1).f(2) < 0$ , alors  $\exists \xi \in ]1, 2[$  tel que  $f(\xi) = 0$ .

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{2-1}{2 \times 10^{-2}}\right)}{\ln 2} \simeq 5,64 \implies n = 6.$$

Le tableau suivant résume les pas de la méthode.

$n$	$a_n$	$b_n$	$x_n$	$f(x_n)$	signe : $f(a_n).f(x_n)$	$\delta_n = \frac{b-a}{2^{n+1}}$
0	1	2	1.5	2.375	-	0.5
1	1	1.5	-1.25	-1.789	+	0.25
2	1.25	1.5	1.375	0.1621	-	0.125
3	1.25	1.375	1.3125	-0.848	+	0.0625
4	1.3125	1.375	1.3437	-0.3509	-	0.03125
5	1.3437	1.375	1.3593	-0.0964	+	0.015625
6	1.35937	1.375	1.36718	0.0322	+	0.0078125

**Exemple 2 :** Calculons la première racine de l'équation  $\ln(x) - x^2 + 2 = 0$  qui appartient à l'intervalle  $[0.1, 0.5]$  avec une précision de  $\varepsilon = 0.01$ .

Calculons le nombre de divisions  $n$  à faire :

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{0.5-0.1}{2 \times 10^{-2}}\right)}{\ln 2} \simeq 4.32 \implies n = 5.$$

Le tableau suivant résume les pas de la méthode.

$n$	$a_n$	$b_n$	$x_n$	$f(x_n)$	signe : $f(a_n).f(x_n)$	$\delta_n = \frac{b-a}{2^{n+1}}$
0	0.1	0.5	0.3	0.706	-	0.2
1	0.1	0.3	0.2	0.351	-	0.1
2	0.1	0.2	0.15	0.08	-	0.05
3	0.1	0.15	0.125	-0.095	+	0.025
4	0.125	0.15	0.1375	-0.030	+	0.0125
5	0.1375	0.15	0.14375	0.0393	-	0.0062

### 3.3 Méthode de Lagrange

La méthode de Lagrange, ou méthode de la fausse position, est une méthode pour trouver une valeur approchée de la solution d'une équation  $f(x) = 0$ . Elle consiste sur le principe suivant : on suppose que la fonction  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et que  $f(a).f(b) <$

0. On considère les points  $A(a, f(a))$  et  $B(b, f(b))$  situés sur la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de  $f$ . On construit une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de réels à l'aide des points  $A_n$  de  $\mathcal{C}_f$ . Pour cela, on pose  $A_0 = A$  et on construit  $A_{n+1}$  en traçant la droite  $(A_nB)$  qui rencontre l'axe ( $Ox$ ) en un point d'abscisse  $x_{n+1}$ . Le point  $A_{n+1}$  est le point de  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse  $x_{n+1}$ .

Choisir un point  $x_0$  vérifie la condition  $f(x_0)f''(x_0) < 0$ , le schéma itératif de l'algorithme de Lagrange est donné par :

$$\begin{cases} -\text{Choisir } x_0 = a \text{ si } f(a)f''(a) < 0. \\ -\text{Poser } x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - b}{f(x_n) - f(b)}. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\text{Choisir } x_0 = b \text{ si } f(b)f''(b) < 0. \\ -\text{Poser } x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)}. \end{cases}$$

**Exemple** Considérons l'équation  $f(x) = x^3 - 20 = 0$ . Comme  $f(0.75)f(4.5) < 0$  donc on peut appliquer le méthode de Lagrange dans l'intervalle  $[0.75, 4.5]$  en choisissant  $x_0 = 0.75$  comme point de départ. La construction des premiers itérés de la méthode de Lagrange sont illustré dans Figure 3.4.

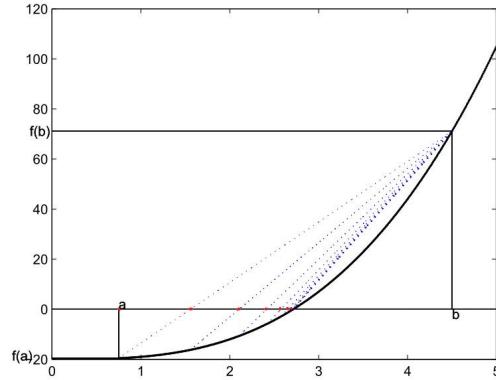


FIGURE 3.4 – Construction des itérés de la méthode de Lagrange.

**Proposition 3.2.** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ , vérifiant  $f(a)f(b) < 0$ ,

et soit  $\xi \in ]a, b[$  l'unique solution de l'équation  $f(x) = 0$ . Si  $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$  tel que  $\forall x \in [a, b], f'(x).f''(x) \neq 0$ , alors la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  construite par la méthode de Lagrange converge vers  $\xi$  et on a l'estimation

$$|x_n - \xi| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}|$$

avec

$$M_1 = \max_{[a,b]} \{|f'(x)|\}, m_1 = \min_{[a,b]} \{|f'(x)|\}$$

**Exemple.** Trouver la racine de l'équation  $x^3 - x - 4 = 0$  dans  $[1, 2]$  avec une erreur  $\varepsilon = 10^{-2}$ , en utilisant la méthode de Lagrange.

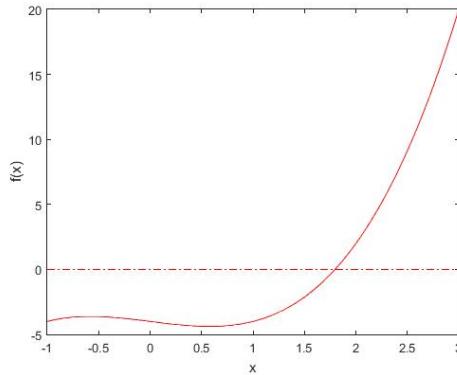


FIGURE 3.5 – Graphe de  $f$

On a

$$M_1 = \max_{[1,2]} \{|f'(x)|\} = |f'(2)| = 11$$

$$m_1 = \min_{[1,2]} \{|f'(x)|\} = |f'(1)| = 2,$$

et pour tout  $x \in [1, 2]$ , on a

$$f'(x) = 3x^2 - 1 > 0,$$

$$f''(x) = 6x > 0,$$

et  $f(1)f''(1) < 0$ , donc on prend  $x_0 = 1$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - 2}{f(x_n) - f(2)}.$$

En suivant le schéma itératif de l'algorithme de Lagrange on obtient,

$$* x_1 = x_0 - f(x_0) \frac{x_0 - 2}{f(x_0) - f(2)} = 1 - (-4) \frac{2 - 1}{2 - (-4)} = 1.666 \text{ et } f(x_1) = -1,0368$$

$$|x_1 - \xi| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_1 - x_0| = \frac{11 - 2}{2} |1,6667 - 1| = 3.$$

$$* x_2 = x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - 2}{f(x_1) - f(2)} = 1.7805$$

$$|x_2 - \xi| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_2 - x_1| = 0.05$$

$$* x_3 = x_2 - f(x_2) \frac{x_2 - 2}{f(x_2) - f(2)} = 1.7945$$

$$|x_3 - \xi| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_3 - x_2| = 0.034$$

$$* x_4 = x_3 - f(x_3) \frac{x_3 - 2}{f(x_3) - f(2)} = 1.7961$$

$$|x_4 - \xi| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_4 - x_3| = 0.009$$

Donc  $\xi = 1.7961 \pm 0.009$

### 3.4 Méthode de Newton-Raphson

Cette méthode est la plus utilisée pour la recherche des racines dans les problèmes à une dimension. Elle requiert cependant l'évaluation de  $f(x)$  et de  $f'(x)$ . Soit  $\xi$  une racine unique de l'équation  $f(x) = 0$  sur l'intervalle  $[a, b]$ , tel que  $f$  est continue qui vérifie :

$$f'(x) \neq 0 \text{ sur } [a, b], \quad (3.2)$$

$$f''(x) \neq 0 \text{ sur } [a, b] \quad (3.3)$$

L'idée principale de cette méthode, consiste à remplacer à chaque itération  $k$ , l'arc de la courbe de la fonction  $y = f(x)$  dans  $[a, b]$  par la tangente de cet arc au point  $(x_n, f(x_n))$  : L'abscisse  $x_{n+1}$  de l'intersection de l'équation de la tangente avec l'axe  $Ox$  est une approximation de l'unique solution  $\xi$  dans  $[a, b]$  pour l'équation  $f(x) = 0$  (voir Figure 3.6). L'équation de la tangente s'écrit :

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

qui coupe l'axe  $Ox$  au point  $(x_{n+1}, 0)$  d'où :

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$$

ce qui donne le schéma itératif suivant de Newton-Raphson :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{-- Choisir } x_0 \in [a, b] \text{ tel que } f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0. \\ \text{-- Poser } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{array} \right.$$

**Proposition 3.3.** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ , vérifiant  $f(a)f(b) < 0$ ,

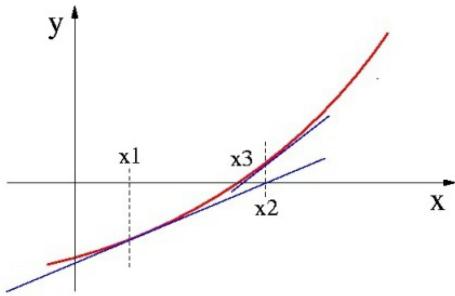


FIGURE 3.6 – Construction des premiers itérés de la Méthode de Newton-Raphson.

et soit  $\xi \in ]a, b[$  l'unique solution de l'équation  $f(x) = 0$ . Si  $f \in C^2([a, b])$  tel que  $\forall x \in [a, b], f'(x).f''(x) \neq 0$ , alors la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  construite par la méthode de Newton-Raphson converge vers  $\xi$  et on a l'estimation

$$|x_n - \xi| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_n - x_{n-1})^2$$

avec

$$M_2 = \max_{[a,b]} \{|f''(x)|\}, m_1 = \min_{[a,b]} \{|f'(x)|\}$$

**Exemple 1 :** Calculons la racine de l'équation  $x^3 - x - 4 = 0$  dans  $[1, 2]$ , avec un erreur  $\varepsilon < 10^{-2}$ , en utilisant la méthode de Newton-Raphson.

On a  $f(1).f(2) < 0, \forall x \in [1, 2] : f'(x) = 3x^2 - 1 > 0$  et  $f''(x) = 6x > 0$ . Appliquons le schéma itératif de l'algorithme de Newton-Raphson partant de  $x_0 = 2$  avec

$f(2) \cdot f''(2) > 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} M_2 &= \max_{[1,2]} \{|f''(x)|\} = f''(2) = 12 \text{ et } m_1 = \min_{[1,2]} \{|f'(x)|\} = f'(1) = 2 \\ * x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 1,8181, \\ |\xi - x_1| &\leq \frac{M_2}{2m_1} (x_1 - x_0)^2 = \frac{12}{2 \times 2} (1.818 - 2)^2 \simeq 0.01 \\ * x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,8181 - \frac{f(1,8181)}{f'(1,8181)} = 1.7966, \\ |\xi - x_2| &\leq \frac{M_2}{2m_1} (x_2 - x_1)^2 = \frac{12}{4} (1.7966 - 1.818)^2 \simeq 0.001 < 0.01 \end{aligned}$$

Donc  $\xi = 1.7966 \pm 0.001$ .

Dans certaines situations, la dérivée de  $f$  est très compliquée voir même impossible à calculer. Dans ce cas, nous approchons la dérivée par un taux d'accroissement. Ce que nous obtenons est appelée méthode de la sécante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{-- Choisir } x_0, x_1 \in [a, b] \text{ proche de } \xi. \\ \text{-- Poser } x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \end{array} \right.$$

Ici,  $x_{n+1}$  dépend de  $x_n$  et de  $x_{n-1}$  : on dit que c'est une méthode à deux pas ; nous avons d'ailleurs besoin de deux itérés initiaux  $x_0$  et  $x_1$ . L'avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas le calcul de la dérivée  $f'$ . L'inconvénient est que la convergence n'est plus quadratique.

### 3.5 Exercices supplémentaires

**Exercice 1.** En utilisant l'algorithme de Newton-Raphson, chercher la racine carrée de 2 sur l'intervalle  $[1, 2]$  pour une précision de  $\varepsilon = 10^{-3}$ , en prenant  $x_0 = 2$  comme point initiale.

**Solution .**

Cherchons la racine carrée de 2 sur l'intervalle  $[1, 2]$ , c'est à dire posons

$$x^2 = 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2 = 0$$

. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

On a  $f'(x) = 2x$  et  $f''(x) = 2 > 0$ , d'où

$$M_2 = \max_{[1,2]} |f''(x)| = 2 \text{ et } m_1 = \min_{[1,2]} |f'(x)| = f'(1) = 2$$

$$\begin{aligned} * x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 1.5 \\ |\xi - x_1| &\leq \frac{M_2}{2m_1} (x_1 - x_0)^2 = \frac{2}{2 \times 2} (2 - 1.5)^2 = 0.125 \\ * x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = 1.416 \\ |\xi - x_2| &\leq \frac{M_2}{2m_1} (x_2 - x_1)^2 = \frac{2}{2 \times 2} (1.5 - 1.416)^2 = 0.0035 \\ * x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.416 - \frac{1.416}{1.416} = 1.414 \\ |\xi - x_3| &\leq \frac{M_2}{2m_1} (x_3 - x_2)^2 = \frac{2}{2 \times 2} (1.416 - 1.414)^2 = 2 \times 10^{-6} < \varepsilon \end{aligned}$$

Donc  $x^* \simeq 1.414 \pm 2 \times 10^{-6}$

**Exercice 2.**

**a-** Donné le schéma itératif de l'algorithme de Newton-Raphson pour résoudre une

équation non-linéaire  $f(x) = 0$ .

- b-** Déterminer en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson la racine située dans  $[0, 1]$ , de l'équation  $x^2 = e^{-2x}$ , avec une précision  $\varepsilon \leq 10^{-3}$  en partant d'un point initial  $x_0 = 1$ .

**Solution .**

b- Déterminons la racine située dans  $[0, 1]$ , de l'équation  $x^2 = e^{-2x}$  à  $10^{-3}$  près en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson.

On a

$$f'(x) = 2x + 2e^{-2x} \text{ et } f''(x) = 2 - 4e^{-2x}$$

avec

$$M_2 = \max_{[1,2]} |f''(x)| = f''(1) = 1.45 \text{ et } m_1 = \min_{[1,2]} |f'(x)| = f'(0.346) = 1.69$$

En suivant le même schémas que dans l'exercice précédent, on obtient

$$\begin{aligned} * x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 0.6192 \\ |\xi - x_1| &\leq \frac{M_2}{2m_1} (x_1 - x_0)^2 = 0.0624 \\ * x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.6192 - \frac{f(0.6192)}{f'(0.6192)} = 0.5677 \\ |\xi - x_2| &\leq \frac{M_2}{2m_1} (x_2 - x_1)^2 = 0.0011 \\ * x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.6192 - \frac{0.6192}{0.6192} = 0.5671 \\ |\xi - x_3| &\leq \frac{M_2}{2m_1} (x_3 - x_2)^2 = 1.55 \times 10^{-7} < \varepsilon \end{aligned}$$

Donc  $x^* \simeq 0.5671 \pm 1.55 \times 10^{-7}$

**Exercice 3.** Soit l'équation  $f(x) = 2 \tan(x) - x - 1 = 0$  avec  $x \in [-\pi, \pi]$ .

- a- Séparer analytiquement les racines de cette équation.
- b- Calculer le nombre d'itérations  $n$  nécessaires pour approcher cette racine à  $10^{-3}$  par la méthode de bisection.

**Solution .**

- a- On a  $f(x) = 2 \tan(x) - x - 1$ , et  $f'(x) = \frac{2}{\cos^2(x)} - 1$ . Le tableau de variations de  $f$  est :

$x$	$-\pi$	$-\pi/2$	$\pi/2$	$\pi$		
$f'(x)$	+		+		+	
$f(x)$	2.14	$\nearrow +\infty$	$\downarrow -\infty$	$\nearrow +\infty$	$\downarrow -\infty$	$\nearrow -4.14$

Donc d'après ce tableau il existe une seule racine dans l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

b-Calculons le nombre nécessaire des itérations

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{\ln(\frac{b-a}{2\varepsilon})}{\ln 2} \\ &\geq \frac{\ln(\frac{\pi}{2 \times 10^{-3}})}{\ln 2} \simeq 10.6173 \end{aligned}$$

Donc pour atteindre la racine à  $2 \times 10^{-3}$  près, il faudra avoir  $n \geq 11$ .

**Exercice 4 .**

a-Calculer la racine minimale de l'équation  $x^4 - 2x - 4 = 0$  à  $5 \times 10^{-3}$  près, en utilisant la méthode de Newton-Raphson et la méthode de Lagrange.

b- D'après les résultats obtenus comparer les deux méthodes et conclure.

**Solution .** D'après Figure 3.7, cette équation admet deux racines, cherchons la racine négatif situé dans l'intervalle  $[-2, -1]$ .

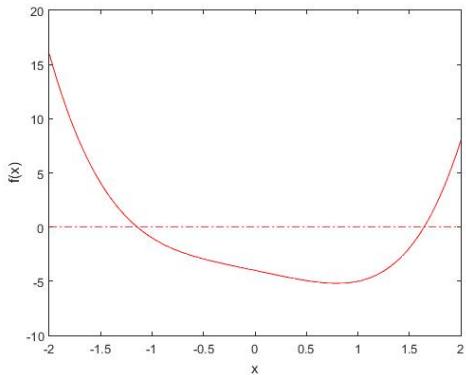


FIGURE 3.7 – Graphe de  $f$ .

**Méthode de Newton :**

On a

$$f'(x) = 4x^3 - 2 < 0, \forall x \in [-2, -1],$$

$$f''(x) = 12x^2 > 0, \forall x \in [-2, -1].$$

et

$$M_2 = \max_{[-2, -1]} \{|f''(x)|\} = |f''(-2)| = 48$$

$$m_1 = \min_{[-2, -1]} \{|f'(x)|\} = |f'(-1)| = 6$$

Puisque  $f(-2) \cdot f''(-2) > 0$ , donc on prend  $x_0 = -2$  comme point initiale, et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

En suivant le schéma itératif de l'algorithme de Newton-Raphson on obtient,

$$\begin{aligned}
 * x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -2 - \frac{16}{-34} = -1.53 \\
 |\xi - x_1| &\leq \frac{M_2}{2m_1} (x_1 - x_0)^2 = \frac{48}{2 \times 6} (-1.53 + 2)^2 = 0.88 \\
 * x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -1.53 - \frac{-4.53}{-16.32} = -1.25 \\
 |\xi - x_2| &\leq \frac{M_2}{2m_1} (x_2 - x_1)^2 = 0.31 \\
 * x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -1.25 - \frac{0.94}{-9.81} = -1.1542 \\
 |\xi - x_3| &\leq \frac{M_2}{2m_1} (x_3 - x_2)^2 = 0.03 \\
 * x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = -1.1542 - \frac{0.083}{-8.15} = -1.144 \\
 |\xi - x_4| &\leq \frac{M_2}{2m_1} (x_4 - x_3)^2 = 0.004
 \end{aligned}$$

Donc  $\xi = -1.144 \pm 0.004$

### Méthode de Lagrange :

Puisque  $f(-1) \cdot f''(-1) < 0$ , donc on prend  $x_0 = -1$  comme point initiale, et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n + 2}{f(x_n) - f(-2)}$$

avec  $M_1 = \max_{[-2,-1]} \{|f'(x)|\} = |f'(-2)| = 34$  et  $m_1 = \min_{[-2,-1]} \{|f'(x)|\} = |f'(-1)| = 6$

$$* x_1 = x_0 - f(x_0) \frac{x_0 + 2}{f(x_0) - f(-2)} = -1.05$$

$$|x_1 - \xi| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_1 - x_0| = 0.274$$

$$* x_2 = x_1 - f(x_1) \frac{x_1 + 2}{f(x_1) - f(-2)} = -1.0941$$

$$|x_2 - \xi| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_2 - x_1| = 0.164$$

$$* x_3 = x_2 - f(x_2) \frac{x_2 + 2}{f(x_2) - f(-2)} = -1.1149$$

$$|x_3 - \xi| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_3 - x_2| = 0.097$$

$$* x_4 = x_3 - f(x_3) \frac{x_3 + 2}{f(x_3) - f(-2)} = -1.127$$

$$|x_4 - \xi| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_4 - x_3| = 0.0564$$

$$* x_5 = x_4 - f(x_4) \frac{x_4 + 2}{f(x_4) - f(-2)} = -1.1341$$

$$|x_5 - \xi| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_5 - x_4| = 0.033$$

$$* x_6 = x_5 - f(x_5) \frac{x_5 + 2}{f(x_5) - f(-2)} = -1.1382$$

$$|x_6 - \xi| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_6 - x_5| = 0.0191$$

$$* x_7 = x_6 - f(x_6) \frac{x_6 + 2}{f(x_6) - f(-2)} = -1.1406$$

$$|x_7 - \xi| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_7 - x_6| = 0.011$$

$$* x_8 = x_7 - f(x_7) \frac{x_7 + 2}{f(x_7) - f(-2)} = -1.1419$$

$$|x_8 - \xi| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_8 - x_7| = 0.006$$

$$* x_9 = x_8 - f(x_8) \frac{x_8 + 2}{f(x_8) - f(-2)} = -1.14275$$

$$|x_9 - \xi| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_9 - x_8| = 0.004$$

Donc  $\xi = -1.14275 \pm 0.004$ .

Pour atteindre une précision  $\varepsilon < 5 \times 10^{-3}$  il faudrait faire 09 itérations par la méthode de Lagrange alors que la méthode de Newton ne nécessite que 4 itérations. La méthode de Newton converge beaucoup plus rapide que la méthode Lagrange.

**Exercice 5.** On considère l'équation  $f(x) = 0$ , avec  $f(x) = \ln(x) - x + 2$ .

- 1.a-Ecrire l'équation  $f(x) = 0$  sous la forme  $f_1(x) = f_2(x)$  avec  $f_1(x) = \ln(x)$ .
- b- Tracer les graphes de  $f_1$  et  $f_2$ . Que peut-on dire concernant cette équation ?
- 2.a- Faire 4 itérations de la méthode de dichotomie à partir de l'intervalle  $[3, 4]$ . Quelle itération donne le meilleur résultat ? Justifier et conclure.
- b-Déterminer le nombre d'itérations  $n$  à faire pour avoir  $\delta \leq 10^{-4}$
- c- Donner une estimation de l'erreur après 25 itérations.
3. Approcher la racine à  $10^{-4}$  près par la méthode de Newton en posant  $x_0 = 3$  (utiliser 4 chiffre après la virgule).
4. D'après les résultats obtenus comparer les deux méthodes et conclure.

**Solution .**

1-a.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \ln(x) - x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = x - 2 \\ &\Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) \text{ avec } f_1(x) = \ln(x) \text{ et } f_2(x) = x - 2 \end{aligned}$$

1-b. D'après Figure 3.8, les graphes de  $f_1$  et  $f_2$  possèdent deux points d'intersection, donc cette équation possède deux racines  $\xi_1 \in ]0, 1[$  et  $\xi_2 \in ]3, 4[$ .

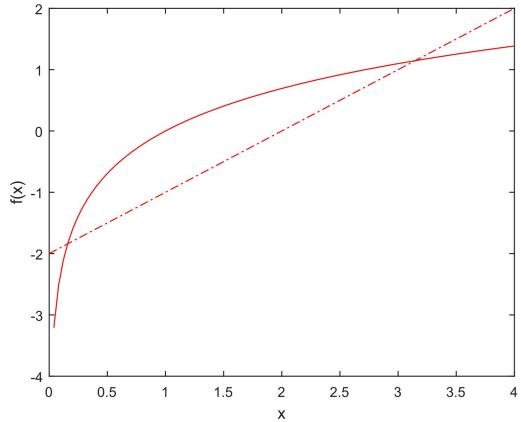


FIGURE 3.8 – Séparation graphique des racines.

2-a. En suivant la même procédure que dans les exemples 1 et 2 on obtient  $x_1 = 3.5, x_2 = 3.25, x_3 = 3.125$  et  $x_4 = 3.1875$  avec  $x_3$  est la meilleur résultat obtenu car  $f(x_3) = 0.014$  est le plus proche que  $f(x_1), f(x_2), f(x_4)$ . On conclus que même si la convergence de la suite de dichotomie vers la racine est sûre, elle n'est pas monotone.

2-b.

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{\ln(\frac{b-a}{2\varepsilon})}{\ln 2} \\ &\geq \frac{\ln(\frac{1}{10^{-4}})}{\ln 2} \simeq 13.29 \end{aligned}$$

Donc  $n \geq 14$ .

2-c

$$\begin{aligned} |x_n - \xi| &\leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \\ &= \frac{4-3}{2^{26}} = 1.4901 \times 10^{-8} \end{aligned}$$

3. En appliquant l'algorithme de Newton partant du point  $x_0 = 3$ , et après 3 itérations, l'algorithme atteint la racine à  $10^{-4}$ . les points générés sont  $x_1 = 3.1479, x_2 =$

3.1462 et  $x_3 = 3.1462$ .

4. Pour atteindre une précision  $10^{-4}$ , il faudrait faire 14 itérations par la méthode de dichotomie alors que la méthode de Newton ne nécessite que 3 itérations. La méthode de Newton converge beaucoup plus rapidement que la méthode de dichotomie.

# Chapitre 4

## Résolution numériques des équations différentielles ordinaires

En physique, les phénomènes sont gouvernés par des lois écrites souvent sous forme différentielle (cas unidimensionnel) ou plus généralement sous forme d'équations aux dérivées partielles (cas multidimensionnel). Comme signalé auparavant qu'on se confronte dans plusieurs cas à des difficultés de résolution par les méthodes analytiques, pour cela on fait appel aux méthodes numériques.

Plusieurs méthodes sont utilisées, le choix balance entre la simplicité et la précision de la méthode.

**Définition 4.1.** *On appelle équation différentielle ordinaire (EDO) d'ordre  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  toute relation de type*

$$f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0 \quad (4.1)$$

*qu'on écrit sous la forme (dite canonique)*

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad (4.2)$$

où  $y$  est une fonction de variable  $t$  et pour  $i = 1, \dots, n$ ,  $y^{(i)}$  est la dériver de  $y$  par rapport à  $t$  d'ordre  $i$ .

La solution générale de l'équation (4.1) et (4.2) est donné par la relation entre  $t$  et  $y$  avec un nombre de constants (égale au degré de l'équation). Cette relation peut être implicite :

$$W(t, y(t), c_1, \dots, c_n) = 0$$

ou explicite

$$y(t) = V(t, c_1, \dots, c_n)$$

Pour déterminer les constantes  $c_i, i = 1, \dots, n$ , il nous faut des conditions (initiales ou limites) sur  $y$ . Dans ce cours on se contentera à résoudre numériquement des équations du premier ordre de types de problème de Cauchy.

**Définition 4.2.** Une équation différentielle est dite d'ordre 1 si elle est de la forme :  $y'(t) = f(t, y(t))$  avec  $t \in [a, b]$  et  $f$  une fonction définie :  $[a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

## 4.1 Problème de Cauchy

Il s'agit de trouver une fonction dérivable  $y(t) : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)), t \in I \\ y(t_0) = y_0 \text{(conditions initiale)} \end{array} \right. \quad (P)$$

### Existence et l'unicité de la solution

**Théorème 4.1.** Si  $f(t, y(t))$  est une fonction continue sur  $I \times \mathbb{R}$  alors le problème (P) admet une solution. L'unicité de la solution est garantie sous l'une des conditions suivantes :

a-  $f(t, y(t))$  satisfait la condition de Lipschitz par rapport à la variante  $y$ , i.e.,

$$\exists L > 0, \forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} : |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| \leq L|y_1(t) - y_2(t)|$$

b- La dérivée partielle  $\frac{\delta f}{\delta y}(t, y(t))$  est continue et bornée sur  $I \times \mathbb{R}$ .

**Exemple 1.**

$$(P_1) : \begin{cases} y'(t) = \frac{-y}{t \ln t} + \frac{1}{\ln t}, t \in [e, 5] \\ y(e) = e \end{cases}$$

On a  $f(t, y) = \frac{-y}{t \ln t} + \frac{1}{\ln t}$  est continue, et  $|\frac{\delta f}{\delta y}(t, y(t))| = |\frac{-1}{t \ln t}| \leq \frac{1}{e}$ , donc  $\frac{\delta f}{\delta y}$  est continue sur  $[e, 5] \times \mathbb{R}$  et bornée, donc le problème  $(P_1)$  admet une solution unique  $y(t) = \frac{t}{\ln(t)}$ .

**Exemple 2.**

$$(P_2) : \begin{cases} y'(t) = 1 + t \sin(ty(t)), t \in [0, 2] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On a  $f(t, y) = 1 + t \sin(ty(t))$  est continue, et  $\frac{\delta f}{\delta y}(t, y(t)) = t^2 \cos(ty(t)) \leq t^2 \leq 4$ , donc  $\frac{\delta f}{\delta y}$  est bornée, donc le problème  $(P_2)$  admet une solution unique.

## 4.2 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est la procédure numérique la plus simple qui permet de résoudre de façon approximative des équations différentielles ordinaires du premier ordre avec condition initiale. Pour résoudre numériquement le problème de Cauchy (P) ; nous commençons par partitionner l'intervalle  $I = [a, b]$ , c.à.d. nous choisissons des points  $t_0, t_1, \dots, t_n$  tels que  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , avec  $t_{i+1} = t_i + h$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$  (le pas de subdivision) et  $n$  c'est le nombre de points correspondants. La tangente à la courbe  $y = y(t)$  en  $t = t_0$  a

pour équation :

$$\tilde{y}(t) = y(t_0) + (t - t_0)y'(t_0)$$

ou

$$\tilde{y}(t) = y(t_0) + (t - t_0)f(t_0, y(t_0)).$$

Au point  $t = t_1$ , on obtient (voir Figure 4.1) :

$$y(t_1) \simeq \tilde{y}(t_1) = y(t_0) + (t_1 - t_0)f(t_0, y(t_0))$$

or  $h = t_1 - t_0$ , donc

$$y(t_1) \simeq \tilde{y}(t_1) = y(t_0) + hf(t_0, y(t_0)).$$

Posons  $y_0 = \tilde{y}(t_0), y_1 = \tilde{y}(t_1)$ , et on recommence la même procédure dans l'intervalle  $[t_1, t_2]$ , on obtient :

$$y(t_2) \simeq y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1).$$

Et ainsi de suite, on construit l'algorithme d'Euler suivant :

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0), t_0 = a \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i), i = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

avec  $h = \frac{b-a}{n}$ , et  $t_{i+1} = t_i + h$ .

## Erreur de la méthode d'Euler

**Définition 4.3.** Une méthode numérique approchant  $y(t_i)$  par  $y_i$  telles que l'erreur  $e_i = |y(t_i) - y_i|$  vérifie

$$e_i \leq kh^p$$

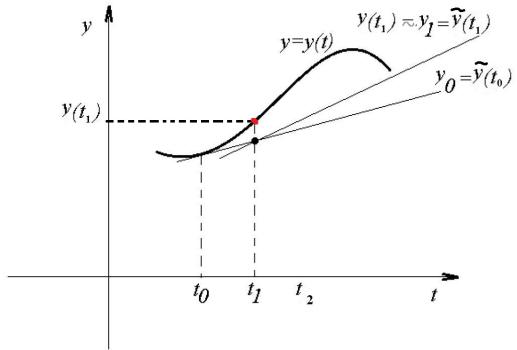


FIGURE 4.1 – Construction des premiers itérés de la méthode de d’Euler.

est dite d’ordre  $p$ , où  $k$  est une constante indépendante de  $i$  et de  $h$ , et  $y(t_i)$  est la valeur exacte de la solution du problème de Cauchy au point  $t_i = t_0 + ih$ .

**Théorème 4.2.** Soit  $f(t, y(t))$  une fonction continue sur  $[a, b] \times \mathbb{R}$  et  $L$ -lipschitzienne par rapport à la variante  $y$ , et que  $y \in \mathcal{C}^2[a, b]$ . Alors on a

$$e_i \leq (e^{L(b-a)} - 1) \frac{M_2}{2L} h$$

où  $M_2 = \max_{t \in [a, b]} |y''(t)|$  et  $e_i$  est l’erreur commise au point  $(t_i, y_i)$ , c.a.d.  $e_i = |y(t_i) - y_i|$ .

**Remarque 4.1.** Ce résultat s’exprime sous la forme  $e_i \leq kh$ , c’est à dire que la méthode d’Euler est d’ordre 1.

**Exemple 1 :** Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = ty^{1/3} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Calculons  $y(1.01), y(1.02), y(1.03)$  par la méthode d’Euler.

On prend  $y_0 = 1, t_0 = 1$  avec  $y_{i+1} = y_i + h(t_i y_i^{1/3})$  et  $h = 0.01$ , d'où :

$$y(1.01) \simeq y_1 = y_0 + 0.01 \times t_0 \times y_0^{1/3} = 1 + 0.01 \times 1 \times 1^{1/3} = 1.01.$$

$$y(1.02) \simeq y_2 = y_1 + 0.01 \times 1.01 \times (1.01)^{1/3} = 1.0201$$

$$y(1.03) \simeq y_3 = y_2 + 0.01 \times 1.0201 \times (1.0201)^{1/3} = 1.0304$$

**Exemple 2 :** Résoudre le problème de Cauchy suivant par la méthode d'Euler en prenant un pas  $h = 0.25$ .

$$\begin{cases} y'(t) = 2 - ty^2, t \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Les points  $t_i$  à évaluer pour  $h = 0.25$  sont  $t_0 = 0, t_1 = 0.25, t_2 = 0.5, t_3 = 0.75, t_4 = 1$ .

En suivant le même schéma que dans l'exemple précédent on obtient :

$$y(0.25) \simeq y_1 = y_0 + 0.25 \times f(t_0, y_0) = 1 + 0.25(2 - 0 \times 1^2) = 1.5$$

$$y(0.5) \simeq y_2 = y_1 + 0.25 \times f(t_1, y_1) = 1.5 + 0.25(2 - 0.25 \times 1.5^2) = 1.8594$$

$$y(0.75) \simeq y_3 = y_2 + 0.25 \times f(t_2, y_2) = 1.859 + 0.25(2 - 0.5 \times 1.859^2) = 1.927$$

$$y(1) \simeq y_4 = y_3 + 0.25 \times f(t_3, y_3) = 1.927 + 0.25(2 - 0.75 \times 1.927^2) = 1.7308$$

**Exemple 3 :** Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = t + y, t \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On veut approcher la solution de ce problème en  $t = 1$  à l'aide de la méthode d'Euler, en subdivisant l'intervalle  $[0, 1]$  en dix parties égales. En suivant la même procédure, on obtient les valeurs  $\{t_i, y_i\}$  :

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_i$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$y_i$	1	1,1	1,22	1,362	1,5282	1,7210	1,9431	2,1974	2,4871	2,8158	3,1874

D'après ce tableau on obtient  $y(1) \simeq y_{10} = 3,187$ . L'approximation calculée est très grossière car la solution exacte de ce problème est donnée par  $y(t) = 2e^t - t - 1$ , donc la valeur exacte est  $y(1) = 3,437$ .

### 4.3 Méthode d'Euler améliorée

Cette méthode est plus précise que la précédente, elle consiste à remplacer dans la méthode d'Euler la pente de la tangente en  $(x_n, y_n)$  par la valeur corrigée au milieu de l'intervalle  $[x_n, x_{n+1}]$ , dont l'algorithme est :

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0), t_0 = a \\ y_{i+1} = y_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1\right), i = 1, \dots, n-1 \\ K_1 = f(x_i, y_i) \end{cases}$$

**Exemple** Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - t + 2, t \in [0, 1] \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

En utilisant l'algorithme de la méthode d'Euler améliorée avec un pas  $h = 0.1$  on obtient :

$$\begin{cases} y_0 = y(0) = 2, h = 0.1 \\ y_1 = y(0.1) = y_0 + hf(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}K_1), \\ K_1 = f(t_0, y_0) = f(0.2) = 4 \\ y(0.1) \simeq y_1 = 2 + \frac{0.1}{2}f(0.05, 2.2) = 2.415. \end{cases}$$

En répétant la même démarche pour les autres itérations, on obtient les résultats dans le tableau suivant :

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_i$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$y_i$	2	2.415	2.8465	3.3111	3.8122	4.3535	4.9388	5.5727	6.2599	7.0059	7.8165

## 4.4 Méthode de Runge–Kutta

Les méthodes de type Runge–Kutta permettent d'obtenir une plus grande précision (elles génèrent des solutions numériques plus proches des solutions analytiques) que la méthode d'Euler.

### 4.4.1 Méthode de Runge–Kutta d'ordre 2 (Heun)

La méthode de Rung-Kutta d'ordre 2 ( $RK_2$ ) est une amélioration de la méthode d'Euler. En effet, la méthode d'Euler s'appuie sur le développement de Taylor d'ordre 1. Or, il est évident qu'on peut obtenir des méthodes plus performantes en considérant des développements d'ordre supérieur à 1. Ainsi, si la fonction  $f$  est suffisamment différentiable, on peut écrire :

$$y_{i+1} = y_i + h \times y'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(t_i)$$

avec,

$$y'(t) = f(t, y) \text{ et } y''(t) = \frac{\delta f}{\delta t}(t, y) + f(t, y) \times \frac{\delta f}{\delta y}(t, y).$$

Donc,

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\delta f}{\delta t}(t_i, y_i) + f(t_i, y_i) \times \frac{\delta f}{\delta y}(t_i, y_i) \right),$$

du fait que l'on a :  $f(t_i + h, y_i + h f(t_i, y_i)) = f(t_i, y_i) + h \left( \frac{\delta f}{\delta t}(t_i, y_i) + f(t_i, y_i) \times \frac{\delta f}{\delta y}(t_i, y_i) \right)$ ,

on aura

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{2} f(t_i, y_i) + \frac{h}{2} f(t_i + h, y_i + h f(t_i, y_i)),$$

Ainsi, on obtient l'algorithme de Rung-Kutta d'ordre 2 :

$$(RK_2) \begin{cases} y_0 = y(t_0), t_0 = a \text{ et } h = \frac{b-a}{n} \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2), i = 1, \dots, n-1 \\ K_1 = f(t_i, y_i) \\ K_2 = f(t_i + h, y_i + h K_1) \end{cases}$$

#### 4.4.2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

C'est la méthode la plus précise et la plus utilisée en pratique, l'erreur est d'ordre quatre. Elle calcule la valeur de la fonction en quatre points intermédiaires. Son schéma itératif est donné comme suit

$$(RK_4) \begin{cases} y_0 = y(t_0), t_0 = a \text{ et } h = \frac{b-a}{n} \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), i = 1, \dots, n-1 \\ K_1 = f(t_i, y_i) \\ K_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} K_1) \\ K_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} K_2) \\ K_4 = f(t_i + h, y_i + h K_3) \end{cases}$$

Notons que le nombre de termes retenus dans la série de Taylor définit l'ordre de la méthode de Runge-Kutta. Il vient que la méthode Runge-Kutta d'ordre 4, s'arrête au terme  $O(h^4)$  de la série de Taylor.

**Exemple 1 :** Soit le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = y - \frac{2t}{y}, t \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La solution exacte de ce problème est :  $y(t) = \sqrt{2t + 1}$ .

- Donner une valeur approchée de  $y(0.2)$  en utilisant la méthode de  $RK_2$  et  $RK_4$  avec un pas  $h = 0.2$ .
- Apprécier les résultats obtenus en les comparant avec la solution exacte.

**Solution :**

**Méthode de Rung-Kutta d'ordre 2 :**

$$(RK_2) \left\{ \begin{array}{l} y_0 = y(0) = 1, h = 0.2 \\ y_1 = y(0.2) = y_0 + \frac{h}{2}(K_1 + K_2), \\ K_1 = f(t_0, y_0) = f(0, 1) = 1 \\ K_2 = f(t_0 + h, y_0 + hK_1) = f(0.2, 1.2) = 0.866 \\ y_1 = y(0.2) = 1 + \frac{0.2}{2}(1 + 0.866) = 1.1866. \end{array} \right.$$

$$e_{RK_2} = |\sqrt{2 \times (0.2) + 1} - 1.1866| = 3.450709 \times 10^{-3}.$$

**Méthode de Rung-Kutta d'ordre 4 :**

$$(RK_4) \left\{ \begin{array}{l} y_0 = y(0) = 1, h = 0.2 \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \\ K_1 = f(t_0, y_0) = 1 \\ K_2 = f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}K_1) = f(0.1, 1.1) = 0.918182 \\ K_3 = f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}K_2) = f(0.1, 1.091818) = 0.908637 \\ K_4 = f(t_0 + h, y_0 + hK_3) = f(0.2, 1.181727) = 0.843239 \\ y_1 = 1 + \frac{0.2}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 1.1832292 \end{array} \right.$$

$$e_{RK_4} = |\sqrt{2 \times (0.2) + 1} - 1.1832292| = 1.32 \times 10^{-5}. \text{ Donc } e_{RK_4} \ll e_{RK_2}.$$

**Exemple 2 :** Résoudre le problème de Cauchy suivant, par la méthode  $RK_4$  en prenant un pas  $h = 0.25$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = 2 - ty^2, t \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$$

On a,

$$(RK_4) \left\{ \begin{array}{l} y_0 = y(0) = 1, h = 0.25 \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), i = 1, \dots, n-1 \\ K_1 = f(t_0, y_0) = 2 \\ K_2 = f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}K_1) = 1.8047 \\ K_3 = f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}K_2) = 1.8122 \\ K_4 = f(t_0 + h, y_0 + hK_3) = 1.4722 \\ y_1 = 1 + \frac{0.25}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 1.4461 \end{array} \right.$$

En répétant le même processus que dans l'étape 1, on obtient :  $y_2 = 1.7028, y_3 = 1.7317$  et  $y_4 = 1.6147$

## 4.5 Exercices supplémentaires

**Exercice 1.** Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = 2t - y(t) \mid t \in [0, 1] \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (P)$$

- a- Montrer que le problème  $(P)$  admet une solution unique.
- b- Vérifier que le problème  $(P)$  admet l'équation (4.3) comme une solution particulière,

$$y(t) = 2t - 2 + 3e^{-t}. \quad (4.3)$$

- c- Donner le schéma itératif de l'algorithme Runge–Kutta d'ordre quatre pour résoudre le problème  $(P)$ .
- d- Appliquer l'algorithme Runge–Kutta d'ordre quatre à ce problème avec  $h = 0.1$  pour évaluer la solution en  $t = 0.3$ . Comparer la solution obtenue avec la solution exacte.

**Solution .**

- a- On a  $\frac{\delta f}{\delta y} = 1$  est une fonction continue et bornée, donc ce problème admet une solution unique.
- b- On d'après (4.3)

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2 - 3e^{-t} \\ &= 2 - 3e^{-t} - 2t + 2t \\ &= -y(t) + 2t \end{aligned}$$

D'autre part on a  $y(0) = -2 + 3 = 1$ , d'où on déduit que l'équation (4.3) est une solution particulière.

c-

$$(RK_4) \left\{ \begin{array}{l} y_0 = y(t_0), t_0 = a \text{ et } h = \frac{b-a}{n} \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), i = 1, \dots, n-1 \\ K_1 = f(t_i, y_i) \\ K_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(t_i + h, y_i + hK_3) \end{array} \right.$$

d- Appliquons l'algorithme de la méthode de Runge-Kutta  $RK_4$  avec  $h = 0.1$

$$(RK_4) \left\{ \begin{array}{l} y_0 = y(0) = 1, h = 0.1 \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), i = 1, \dots, n-1 \\ K_1 = f(t_0, y_0) = f(0, 1) - 1 \\ K_2 = f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}K_1) = f(0.05, 1.05) = -0.95 \\ K_3 = f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}K_2) = f(0.05, 0.955) = -0.852 \\ K_4 = f(t_0 + h, y_0 + hK_3) = f(0.05, 0.914) = -0.814 \\ y_1 = 1 + \frac{0.1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 0.943 \end{array} \right.$$

donc  $y(0.1) \simeq y_1 = 0.943$ .

$$(RK_4) \left\{ \begin{array}{l} y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), i = 1, \dots, n-1 \\ K_1 = f(t_1, y_1) = f(0.1, 0.943) = -0.743 \\ K_2 = f(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}K_1) = f(0.15, 0.905) = -0.605 \\ K_3 = f(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}K_2) = f(0.15, 0.9127) = -0.6127 \\ K_4 = f(t_1 + h, y_1 + hK_3) = f(0.2, 0.8818) = -0.4818 \\ y_2 = 0.943 + \frac{0.1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 0.882 \end{array} \right.$$

donc  $y(0.2) \simeq y_2 = 0.882$ .

En répétant la même démarche, on obtient :  $y(0.3) \simeq y_3 = 0.8436$

**Comparaison :** On a la valeur de  $y(0.3) = 2 \times 0.3 - 2 + 3e^{-0.3} = 0.8225$ , donc

$$e_i = |0.8225 - 0.8436| = 0.0216$$

### Exercice 2.

- a- Donner le schéma itératif de l'algorithme d'Euler pour résoudre le problème ( $P$ ) de l'exercice 1.
- b- Appliquer l'algorithme d'Euler à ce problème avec  $h = 0.1$  pour évaluer la solution en  $t = 0.3$ . Comparer la solution obtenue avec la solution exacte.

#### Solution .

a-

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0), t_0 = a \\ y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i), i = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

avec  $h = \frac{b-a}{n}$ , et  $t_{i+1} = t_i + h$ .

b-

$$y(0.1) \simeq y_1 = y_0 + 0.1(2t_0 - y(t_0)) = 1 + 0.1(2 \times 0 - y(0)) = 0.92.$$

$$y(0.2) \simeq y_2 = y_1 + 0.1(2t_1 - y(t_1)) = 0.868$$

$$y(0.3) \simeq y_3 = y_2 + 0.1(2t_2 - y(t_2)) = 0.8412$$

Donc  $y(0.3) \simeq y_3 = 0.8412$ .

**Comparaison :** La valeur exacte en  $t = 0.3$  est  $y(0.3) = 0.8225$ , donc l'erreur commise lors de l'application de l'algorithme d'Euler est

$$e_i = |0.8225 - 0.8412| = 0.019$$

L'erreur théorique est donnée par

$$e_t \leq (e^{L(b-a)} - 1) \frac{M_2}{2L} h$$

où  $M_2 = \max_{t \in [0,1]} |y''(t)|$  et  $L$  est la constante de Lipschitz de  $f$  par rapport à  $y$  qui égale à 1.

De plus on a,

$$y''(t) = 3e^{-t}$$

Donc  $M_2 = \max_{t \in [0,1]} |3e^{-t}| = 3$ . Donc ,

$$\begin{aligned} e_t &\leq (e^{L(b-a)} - 1) \frac{M_2}{2L} h \\ &\leq (e^{1(0.3-0)} - 1) \frac{3 \times 0.1}{2 \times 1} \\ &\leq 0.05247 \end{aligned}$$

Il est claire que  $e_i \leq e_t$ , donc la méthode d'Euler donne une bonne approximation de la solution de ce problème de Cauchy en  $t = 1$ .

**Exercice 3.** Soit l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t & |t \in [0, 1] \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

La solution exacte de cette équation est  $y(t) = -1 - t + 2e^t$ .

- Approcher numériquement la solution de cette équation en  $t = 1$  à l'aide de la méthode d'Euler en subdivisant l'intervalle en 10 parties égales.
- Comparer la solution obtenu avec la solution exacte.

**Solution .**

Posons  $f(t, y) = y(t) + t$ , les points  $t_i$  à évaluer pour  $h = 0.1$  sont  $t_1 = 0.1, t_2 = 0.2, t_3 = 0.4, \dots, t_{10} = 1$ . En suivant le même schéma que dans les exemples précédents on obtient :

$$\begin{aligned} y(0.1) &\simeq y_1 = y_0 + 0.1 \times f(t_0, y_0) = 1.1 \\ y(0.2) &\simeq y_2 = y_1 + 0.1 \times f(t_1, y_1) = 1.22 \\ y(0.3) &\simeq y_3 = y_2 + 0.1 \times f(t_2, y_2) = 1.362 \\ &\vdots \\ y(1) &\simeq y_{10} = y_9 + 0.1 \times f(t_9, y_9) = 3.1874 \end{aligned}$$

C'est à dire que l'approximation en  $t = 1$  de  $y(t)$  est  $y_{10} = 3.1874$

- **Comparaisons des résultats :**

La valeur exacte en  $t = 1$  est  $y(1) = -1 - 1 + 2e^1 = 3.4366$ . Ainsi l'erreur effectivement commise lors de l'application de la méthode d'Euler est

$$e_i = |3.4366 - 3.1874| = 0.25$$

Cherchons l'erreur théoriques qui est donnée par

$$e_t \leq (e^{L(b-a)} - 1) \frac{M_2}{2L} h$$

où  $M_2 = \max_{t \in [0,1]} |y''(t)|$  et  $L$  est la constante de Lipschitz de  $f$  par rapport à  $y$ .

On a,

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |y_1 - y_2| \Rightarrow L = 1.$$

De plus on a,

$$\begin{aligned}
 y''(t) &= y'(y) + 1 = y(t) + t + 1 \\
 &= 1 + t + (-1 - t + 2e^t) \\
 &= 2e^t
 \end{aligned}$$

Donc  $M_2 = \max_{t \in [0,1]} |2e^t| = 2e$ . Donc

$$\begin{aligned}
 e_t &\leq (e^{L(b-a)} - 1) \frac{M_2}{2L} h \\
 &\leq (e^{1(1-0)} - 1) \frac{2e \times 0.1}{2 \times 1} \\
 &\leq 0.4673
 \end{aligned}$$

Il est claire que  $e_i \leq e_t$ , donc la méthode d'Euler donne une bonne approximation de la solution de ce problème de Cauchy en  $t = 1$ .

**Exercice 4.** Résoudre le problème de Cauchy suivant par la méthode Runge-Kutta d'ordre 4 en prenant un pas  $h = 0.1$  .

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - t + 2, t \in [0, 1] \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

**Solution** .

Appliquons l'algorithme de la méthode de Runge-Kutta  $RK_4$  avec  $h = 0.1$ .

$$(RK_4) \left\{ \begin{array}{l} y_0 = y(0) = 2, h = 0.1 \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), i = 1, \dots, n-1 \\ K_1 = f(t_0, y_0) = 0.4 \\ K_2 = f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}K_1) = 0.4150 \\ K_3 = f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}K_2) = 0.4157 \\ K_4 = f(t_0 + h, y_i + hK_3) = 0.4365 \\ y_1 = 1 + \frac{0.25}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 2.4163 \end{array} \right.$$

En répétant la même démarche pour les autres itérations, on obtient les résultats dans le tableau suivant :

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_i$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$y_i$	2	2.4163	2.8659	3.5323	3.8793	4.4513	5.0728	5.7492	6.4863	7.2903	8.1684

**Exercice 4.** Soit l'équation différentielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = t - \ln y \\ y(2) = 3.4 \end{array} \right.$$

- Calculer  $y(2.8)$  par la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre avec  $h = 0.8$  puis avec  $h = 0.4$ .

**Solution abrégée .**

- $y(2.8)$  avec  $h = 0.8$  est  $y(2.8) \simeq y_1 = 4.255952$ .
- $y(2.8)$  avec  $h = 0.4$  est  $y(2.8) \simeq y_2 = 4.255888$ .

**Exercice 5.** Soit l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = \frac{y^2}{t}$$

$$y(1) = 1$$

- Calculer  $y(1.5)$  par la méthode de Runge–Kutta d'ordre quatre en utilisant un pas  $h = 0.5$ .
- Reprendre le calcul de  $y(1.5)$  avec  $h = 0.25$

**Solution abrégée .**

- $y(1.5)$  avec  $h = 0.5$  est  $y(1.5) \simeq y_1 = 1.67985$
- $y(1.5)$  avec  $h = 0.25$  est  $y(1.5) \simeq y_2 = 1.68178$

**Exercice 6.** Soit le problème de Cauchy suivant :

$$y'(t) = -y + t + 1 \quad |t \in [0, 1]$$

$$y(0) = 1.$$

- a-** Calculer l'approximation de  $y(0.2)$  en utilisant les méthodes d'Euler, avec un pas  $h = 0.1$ .
- b-** Calculer l'approximation de  $y(0.2)$  en utilisant les méthodes d'Euler améliorée, avec un pas  $h = 0.1$ .
- c-** Pour chaque méthode, calculer l'erreur commise en comparant le résultat obtenu avec la solution exacte  $y^*(0.2) = 1.018731$ .

**Solution abrégée .**

- a-  $y(0.2) \simeq y_2 = 1.01$  et  $|y_2 - y(0.2)| = 0,008731$ .
- b-  $y(0.2) \simeq y_2 = 1.019025$  et  $|y_2 - y(0.2)| = 0,000294$ .

# Chapitre 5

## Résolution numériques des systèmes d'équations linéaires

Dans la pratique, l'ingénieur se trouve souvent confronté à des problèmes dont la résolution passe par celle d'un système d'équations qui modélise les divers éléments considérés. Par exemple, la détermination des courants et tensions dans des réseaux électriques passe par la résolution d'un système d'équations linéaires.

On cherche le vecteur  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , solution du système linéaire suivant :

$$AX = b \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (5.1)$$

Ce système admet une solution unique lorsque le déterminant de  $A$  est non nul, ce que nous supposerons dans la suite. La résolution de ce système à l'aide des méthodes direct est impraticable lorsque  $n$  est relativement grand. Par conséquent, il est préférable d'utiliser des méthodes itératives basées sur la construction d'une suite convergente vers

la solution du système. Dans ce chapitre on va introduire deux méthodes itératives qui donnent une solution approximative du système d'équations linéaires en utilisant une fonction linéaire  $f$  telle que  $X^{k+1} = f(X^k), k \in \mathbb{N}$ . Ces méthodes sont très faciles à mettre en œuvre et à programmer, elles ne consomment pas la mémoire et donnent des résultats autant précis que l'on veut.

Etant donné un vecteur initial arbitraire  $X^0$ , on construit une suite de vecteurs

$$X^0, X^1, \dots, X^k, \dots$$

qui converge vers la solution  $X^*$  du système linéaire  $AX = b$ . On considère le système linéaire (5.1) avec  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  inversible et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . Pour toute matrice  $M$  carrée d'ordre  $n$  inversible, le système (5.1) est équivalent à

$$MX - (M - A)X = b$$

ou encore, en posant  $N = M - A$ ,  $B = M^{-1}N$  et  $c = M^{-1}b$  on obtient

$$X = BX + c.$$

Ce qui nous permet de définir la formule itérative suivante :

$$\begin{cases} X^0 \in \mathbb{R}^n \text{ vecteur initiale} \\ X^{k+1} = BX^k + c \end{cases} \quad (5.2)$$

Soit  $X^*$  la solution exacte de (5.1), si on note  $e^k = \|X^k - X^*\|$  le  $k$ -ième vecteur erreur, on obtient

$$\begin{aligned}
e_k &= \|X^k - X^*\| = \|(BX^{k-1} + c) - (BX^* + c)\| = B\|X^{k-1} - X^*\| \\
&= Be_{k-1} = B^k e_0
\end{aligned}$$

**Remarque 5.1.** En pratique si on impose une précision  $\varepsilon$  on peut estimer l'erreur par :

$$\|X^k - X^{k-1}\| \leq \varepsilon$$

cela veux dire que, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  on a :

$$|x_i^k - x_i^{k-1}| \leq \varepsilon$$

**Théorème 5.1.** On dit que la méthode itérative (5.2) converge si la suite de vecteurs  $\{e^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers zéro indépendamment du vecteur initial  $X^0$ , si l'une des trois normes est inférieur à 1 :

- $\|B\|_1 = \max_j \left( \sum_{i=1}^n |B_{ij}| \right)$
- $\|B\|_\infty = \max_i \left( \sum_{j=1}^n |B_{ij}| \right)$
- $\|B\|_2 = \sqrt{\rho(BB^t)}$

Selon les choix des matrices  $M$  et  $N$  on a différentes méthodes itératives. On note  $D$  la matrice formée des seuls éléments diagonaux de  $A$ ,  $E$  la matrice formée des  $-a_{ij}$  si  $i > j$  et  $F$  la matrice formée des  $-a_{ij}$  si  $i < j$ , de sorte que  $A = D - (E + F)$ .

- La matrice  $D$ , c'est une matrice diagonale de  $A$ , donner par :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- La matrice  $E$ , c'est une matrice triangulaire inférieure de  $A$  de diagonale nulle.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice  $F$ , c'est une matrice triangulaire supérieure de  $A$  de diagonale nulle.

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

## 5.1 Méthode de Jacobi

Dans la méthode itérative de Jacobi, la matrice  $A$  du système  $AX = b$  est décomposée en  $A = M - N$ . La matrice  $M$  correspond à la diagonale de  $A$  (et des zéros en dehors de la diagonale)  $M = D$  et la matrice  $N$  est la matrice  $A$  dans laquelle on a remplacé les éléments de la diagonale par des zéros  $N = E + F$ . La matrice  $J = M^{-1}N = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A$  est appelée matrice de Jacobi. Partant d'un vecteur initiale

$X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^t$ , à chaque pas, on calcule  $X^k$  suivant cette formule :

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^k \right), i = 1, 2, \dots, n \quad (5.3)$$

**Remarque 5.2.** La méthode itérative de Jacobi ne converge pas toujours. Si  $A$  est une matrice définie positive, la méthode itérative converge. De même, si  $A$  est une matrice à diagonale strictement dominante c'est-à-dire  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ , alors la méthode de Jacobi est convergente.

**Exemple 1 :** Considérons le système

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$$

Soit  $X^0 = (0, 0, 0)^t$  le vecteur initial, en calculant les cinq premières itérées on trouve :

$$X^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9/4 \end{pmatrix}, X^2 = \begin{pmatrix} -1/16 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}, X^3 = \begin{pmatrix} -1/8 \\ -1/32 \\ 61/32 \end{pmatrix}, X^4 = \begin{pmatrix} 5/128 \\ 15/16 \\ 265/128 \end{pmatrix} \text{ et } X^5 = \begin{pmatrix} 7/512 \\ 261/256 \\ 511/256 \end{pmatrix}$$

**Exemple 2 :** Résoudrons le système suivant par la méthode de Jacobi

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -18 \end{cases}$$

On a,

$$\begin{cases} i = 1, \quad x_1^{k+1} = \frac{1}{3} (2 - x_2^k + x_3^k) \\ i = 2, \quad x_2^{k+1} = \frac{1}{5} (17 - x_1^k - 2x_3^k) \\ i = 3, \quad x_3^{k+1} = \frac{-1}{6} (-18 - 2x_1^k + x_2^k) \end{cases}$$

Soit  $X^0 = (0, 0, 0)^t$  le vecteur initial, on trouve  $X_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 17/5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} 8/15 \\ 31/15 \\ 2.6555 \end{pmatrix}$ .

Après 10 itérations, on obtient le tableau des résultats suivant :

$k$	$x_1^k$	$x_2^k$	$x_3^k$
0	0	0	0
1	0,666666	3,4	3
2	0,533333	2,066667	2,655556
3	0,862963	2,231111	2,833333
4	0,867407	2,094074	2,915802
5	0,940576	2,0601198	2,970123
6	0,959975	2,035835	2,970159
7	0,978108	2,019941	2,980686
8	0,986915	2,012104	2,989379
9	0,992425	2,006865	2,993621
10	0,995585	2,004067	2,996331

D'après ce tableau, on remarque que les valeurs convergent vers la solution  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

## 5.2 Méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel est une amélioration de la méthode de Jacobi en effet elle rend le processus itératif plus rapide. Partons de la méthode de Jacobi, le calcul des vecteurs  $X^1, X_2, \dots, X^k, \dots$ , mène à la convergence, cela veut dire que chaque nouveau vecteur est meilleur que le précédent. On remarque dans la méthode de Jacobi que pour calculer la composante  $x_2^2$  du vecteur  $X^2$  on utilise celles de  $X^1$  malgré que  $x_1^2$  est déjà calculée et elle est meilleure que  $x_1^1$ . D'ici vient le principe de la méthode de Gauss-Seidel, on utilise chaque composante des quelle sera calculée. Ainsi, pour calculer la composante  $x_i^{k+1}$ , on utilise toutes les composantes de  $x_1^{k+1}$  à  $x_{i-1}^{k+1}$  déjà calculées à l'itération  $(k+1)$  en plus de celles  $x_{i+1}^k$  à  $x_n^k$  qui ne sont qu'à l'itération  $k$ .

La matrice  $A$  étant décomposée en :  $A = M - N$ . On prend

$$M = D - E, N = F$$

Ceci revient à modifier (5.3) comme suit : pour  $k \geq 0$  (en supposant encore que  $a_{ii} \neq 0$  pour  $i = 1, \dots, n$ )

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k \right), i = 1, 2, \dots, n \quad (5.4)$$

**Remarque 5.3.** *La méthode de Gauss-Seidel ne converge pas toujours. Si  $A$  est une matrice définie positive, la méthode itérative converge. De même, si  $A$  est une matrice diagonalement dominante, c'est-à-dire si  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ , alors la méthode de Gauss-Seidel converge.*

**Exemple 1 :** Résoudre par la méthode de Gauss-Seidel le système suivant en utilisant 3 itérations et un vecteur initial  $X^0 = (0, 0, 0)^t$ .

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Ce système s'écrira en forme réduite :

$$\begin{cases} i = 1, \quad x_{k+1}^1 = 1 + x_k^2 + 3x_k^3 \\ i = 2, \quad x_{k+1}^2 = 1 - \frac{1}{2}x_{k+1}^1 \\ i = 3, \quad x_{k+1}^3 = -1 + 3x_{k+1}^1 - x_{k+1}^2 \end{cases}$$

- Première itération, on obtient  $X^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$
- Deuxième itération, on obtient  $X^2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 19 \end{pmatrix}$
- Troisième itération, on obtient  $X^3 = \begin{pmatrix} 56 \\ -27 \\ 194 \end{pmatrix}$ .

**Exemple 2 :** Résoudre le même système linéaire de l'exemple 2 par la méthode de Gauss-Seidel.

Pour chaque itération  $k$ , le schéma itératif de la méthode de Gauss-Seidel s'écrit dans ce cas

$$\begin{cases} i = 1, \quad x_1^{k+1} = \frac{1}{3} (2 - x_2^k + x_3^k) \\ \\ i = 2, \quad x_2^{k+1} = \frac{1}{5} (17 - x_1^{k+1} - 2x_3^k) \\ \\ i = 3, \quad x_3^{k+1} = \frac{-1}{6} (-18 - 2x_1^{k+1} + x_2^{k+1}) \end{cases}$$

Partant de  $X^0 = (0, 0, 0)^t$ , on trouve  $X^1 = (2/3, 49/15, 241/90)^t$ . Après 10 itérations, on obtient le tableau des résultats suivant :

$k$	$x_k^1$	$x_k^2$	$x_k^3$
0	0	0	0
1	0.6666667	3.2666667	2.6777778
2	0.4703704	2.234815	2.784321
3	0.8498354	2.116305	2.930561
4	0.9380855	2.040158	2.972669
5	0.9775034	2.015432	2.989929
6	0.9914991	2.005729	2.996212
7	0.9968271	2.002150	2.998584
8	0.9988115	2.000804	2.999470
9	0.9995553	2.000301	2.999802
10	0.9998335	2.000113	2.999926

On constate que pour le même nombre d'itérations, la solution approximative obtenue par la méthode de Gauss-Seidel est plus précise. La méthode de Gauss-Seidel converge généralement plus rapide que la méthode de Jacobi mais pas toujours.

### 5.3 Exercices supplémentaires

**Exercice 1.** Résoudre le système suivant par la méthode de Jacobi, et déterminer le nombre nécessaire d'itérations pour obtenir une erreur  $\varepsilon = \|x^k - x^{k-1}\| \leq 10^{-4}$ , en prenant un vecteur initial  $X^0 = (0, 0, 0)^t$ .

$$\begin{cases} 4x_1 + 1x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$$

**Solution .**

Pour chaque itération  $k$ , le schéma itératif de la méthode de Jordan s'écrit dans ce cas

$$\begin{cases} i = 1, \quad x_1^{k+1} = \frac{1}{4} (4 - 4x_2^k - x_3^k) \\ i = 2, \quad x_2^{k+1} = \frac{1}{2} (2 + x_1^k) \\ i = 3, \quad x_3^{k+1} = \frac{1}{4} (9 - 2x_1^k - x_2^k) \end{cases}$$

Partant de  $X^0 = (0, 0, 0)^t$ , pour atteindre la précision prescrit, nous effectuons 12 itérations, dont les résultats sont présentées dans le tableau suivant :

$k$	$x_k^1$	$x_k^2$	$x_k^3$
0	0	0	0
1	1	1	2.25
2	-0.0625	1.5	1.5
3	-0.125	0.9688	1.9063
4	0.0391	0.9375	2.0703
5	0.0137	1.0195	1.9961
6	-0.0088	1.0068	1.9883
7	-0.0005	0.9956	2.0027
8	0.0015	0.9998	2.0013
9	-0.0002	1.0008	1.9993
10	-0.0002	0.9999	1.9999
11	0.0001	0.9999	2.0001
12	0	1	2

**Exercice 2.** Soit le système suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 17 \end{cases}$$

- a-** En partant de  $X^0 = (0, 0, 0)^t$ , déterminer les 6 premières itérations des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.
- b-** Sachant que la solution exacte est  $X = (1, 2, 3)^t$ , que peut-on conclure ?

**Solution .**

- a- Pour chaque itération  $k$ , le schéma itératif de la méthode de Jordan s'écrit dans ce cas

$$\begin{cases} i = 1, \quad x_1^{k+1} = \frac{1}{3} (2 - x_2^k - x_3^k) \\ i = 2, \quad x_2^{k+1} = \frac{1}{5} (17 - x_1^k - 2x_3^k) \\ i = 3, \quad x_3^{k+1} = -\frac{1}{6} (-18 - 2x_1^k + x_2^k) \end{cases}$$

Partant de  $X^0 = (0, 0, 0)^t$ , on trouve

$$X_1 = (1.5000, 0.8571, 4.2500)^t$$

$$X_2 = (-0.1964, 2.4643, 3.9821)^t$$

$$X_3 = (0.7411, 2.5918, 2.3527)^t$$

$$X_4 = (1.6196, 1.7596, 2.4914)^t$$

$$X_5 = (1.1341, 1.6935, 3.3352)^t$$

$$X_6 = (0.6791, 2.1245, 3.2634)^t$$

avec  $\varepsilon = \|X_6 - X^*\| = 0.4334$ .

- Pour chaque itération  $k$ , le schéma itératif de la méthode de Gauss-Seidel s'écrit dans ce cas

$$\begin{cases} i = 1, \quad x_1^{k+1} = \frac{1}{3} (2 - x_2^k - x_3^k) \\ i = 2, \quad x_2^{k+1} = \frac{1}{5} (17 - x_1^{k+1} - 2x_3^k) \\ i = 3, \quad x_3^{k+1} = -\frac{1}{6} (-18 - 2x_1^{k+1} + x_2^{k+1}) \end{cases}$$

Partant de  $X^0 = (0, 0, 0)^t$ , on trouve

$$X_1 = (1.5, 0.6429, 4.1429)^t$$

$$X_2 = (-0.25, 2.6684, 2.1862)^t$$

$$X_3 = (1.7411, 1.5454, 3.5262)^t$$

$$X_4 = (0.5096, 2.2956, 2.6557)^t$$

$$X_5 = (1.3199, 1.8067, 3.2249)^t$$

$$X_6 = (0.7909, 2.1263, 2.8530)^t$$

avec  $\varepsilon = \|X_6 - x^*\| = 0.2851$ .

b- On constate que, pour un même nombre d'itérations, la solution approximative obtenue par la méthode de Gauss-Seidel est plus précise.

**Exercice 3.** Résoudre par la méthode de Gauss-Seidel avec une précision de  $10^{-3}$  le système suivant :

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$$

**Solution .**

- Pour chaque itération  $k$ , la méthode de Gauss-Seidel s'écrit dans ce cas

$$\begin{cases} i = 1, \quad x_1^{k+1} = \frac{1}{8}(26 - x_2^k - x_3^k) \\ i = 2, \quad x_2^{k+1} = \frac{1}{5}(7 - x_1^{k+1} + x_3^k) \\ i = 3, \quad x_3^{k+1} = \frac{1}{5}(7 - x_1^{k+1} + x_2^{k+1}) \end{cases}$$

Partant de  $X^0 = (0, 0, 0)^t$ , on trouve

$$X_1 = (3.25, 0.75, 0.9000)^t$$

$$X_2 = (3.0438, 0.9712, 0.9855)^t$$

$$X_3 = (3.0054, 0.996, 0.9981)^t$$

$$X_4 = (3.0007, 0.9995, 0.9997)^t$$

$$X_5 = (3.0001, 0.9999, 1)^t$$

Les solutions approchées de ce système convergent vers la solution  $X^* = (3, 1, 1)^t$ .

# Bibliographie

- [1] M. Abdelbaki, Méthodes Numériques, conforme au programme de la 2-ème année ST, Université Larbi Ben Mhidi Oum El Bouaghi, 2015.
- [2] M. Belkacem, Cours de Méthodes Numériques, Editions universitaires européennes EUE, Germany, 2016.
- [3] M. Lakrib, Cours d'analyse numérique, OPU, 2007.
- [4] S. Kenouche, polycopié de cours : Méthodes numériques et programmation, Université M. Khider de Biskra - Algérie.
- [5] F. Jedrzejewski , Introduction aux méthodes numériques, Deuxième édition, Springer-Verlag, 2005. France.
- [6] F. Filbet , Analyse numérique - Algorithme et étude mathématique. Dunod, 2009.
- [7] M.A. Aziz Alaoui, C. Bertelle, Méthodes numériques appliquées, cours, exercices corrigés et mise en oeuvre en JAVA, Faculté des Sciences et Techniques, Le Havre Cedex - France, 2002.
- [8] A. Quarteroni, F. Saleri, P. Gervasio (2010). Calcul scientifique. cours, exercices corrigés et illustration en MATLAB et Octave, Springer-verlag Italia.
- [9] Quarteroni, A., Sacco, R., Saleri, F. (2008). Méthodes Numériques : Algorithmes, analyse et applications. Springer Science & Business Media.
- [10] A. Fortin(2011). Analyse numérique pour ingénieurs. Presses inter Polytechnique.

- [11] J. Bastien, J. N. Martin (2003). Introduction à l'analyse numérique : applications sous Matlab : cours et exercices corrigés. Dunod.
- [12] J. P. Grivet(2012). Méthodes numériques appliquées pour le scientifique et l'ingénieur (édition 2009) : Edition 2013. EDP sciences.

