REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE SETIF1 (ALGERIE)

Département de Mathématiques

POLYCOPIE

Présenté à la faculté des sciences Département de Mathématiques en vue de la préparation de

L'HABILITATION UNIVERSITAIRE

présenté par

Dr. Mohammed Kara

Introduction à l'Analyse Numérique et Applications

Année universitaire 2015-2016

Table des matières

1 Résolution d'équations non linéaires **3**

1.1 Racines de l'équation $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 3

1.1.1 Séparation des racines 4

1.1.2 Approximation des racines, Méthodes itératives 7

1.2 Applications 14

1.2.1 Calcul de $\sqrt{a}, \quad a > 0.$ 15

1.2.2 Calcul de valeurs propres d'une matrice 16

2 Interpolation polynomiale des fonctions **18**

2.0.1 Interpolation 18

2.0.2 Interpolation de Lagrange 21

2.0.3 Interpolation de Newton 23

3 Approximation au sens des moindres carrées **32**

3.0.1 Notions et Définitions 32

3.0.2 Polynômes Orthogonaux 33

3.0.3 Approximation des fonctions au sens des moindres carrées 35

4 Intégration Numérique **42**

4.0.1 Motivations 42

4.0.2 Méthodes Générales : 43

4.0.3 Erreur d'approximation 44

Introduction

L'analyse numérique est une branche des mathématiques appliquées, qui s'intéresse à la mise en pratique des méthodes numériques permettant de résoudre les problèmes continus de mathématique, par des calculs purement numériques à l'aide d'ordinateurs. Plus précisément, l'analyse numérique est consacrée à la construction d'algorithmes permettant de résoudre des problèmes de mathématiques continues qui viennent de la modélisation des phénomènes physiques. Cela signifie qu'elle s'occupe principalement de répondre numériquement à des questions à variables réelles, par exemple : la recherche de solution numérique des équations différentielles et d'autres problèmes liés survenant dans les sciences physiques, l'ingénierie et d'autres domaines d'application qui sont très diversifiés.

Ce cours a été enseigné pour les étudiants du tronc commun technologie à la faculté de l'ingénieur de l'université de Sétif 1. Le but est de présenter aux étudiants quelques notions de base concernant la résolution numérique de certains problèmes mathématiques tout en explicitant des méthodes numériques permettant de résoudre effectivement de tels problèmes. C'est pour cette raison que ce cours est consacré à la mise en place de certaines techniques fondamentales de l'analyse numérique. Le cours contient un traitement assez substantiel de l'approximation des racines des équations algébriques, l'interpolation polynomiale de Lagrange et de Newton, l'approximation au sens des moindres carrées et du calcul approché des intégrales, quatre thèmes qui forment souvent l'essentiel d'une introduction à l'analyse numérique. La plupart des méthodes numériques exposées avaient étés effectivement mise en œuvre au moyens de programmes écrits en Scilab et les séries d'exercices donneront aux lecteurs une approche plus riche du sujet.

Chapitre 1

Résolution d'équations non linéaires

Rares sont les équations en mathématiques que l'on peut effectivement résoudre. Les équations polynomiales du premier et second degré sont particulièrement bien connues et étudiées. Pour le reste, la situation se dégrade très vite ! Si l'on dispose effectivement de formules de résolution générale pour les troisième et quatrième degrés, elles ne sont que très rarement utilisées dans la pratique, à cause de leur complexité. Quant au cinquième degré, ou au-delà, on sait depuis Abel et Galois qu'elles ne peuvent être résolues par radicaux sans parler bien sûr des équations non polynomiales, pour lesquelles des méthodes générales de résolution n'existent que très rarement. Autant dire qu'il est important, sinon essentiel, d'être capable de résoudre de façon approchée des équations de type $f(x) = 0$, où f est une fonction réelle de variable réelle quelconque, que nous supposerons dans tout ce chapitre continue sur son intervalle de définition.

1.1 Racines de l'équation $f(x) = 0$

Définition 1.1.1
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition est une partie $D(f)$ de $\mathbb{R}$. On dit que $\alpha \in D(f)$ est une racine de l'équation

$$f(x) = 0 \tag{1.1}$$

si

$$f(\alpha) = 0. \tag{1.2}$$

La résolution de l'équation (1.1), c'est de trouver tous les nombres α tels que l'équation (1.2) soit vérifiée.
En d'autres termes, on cherche à déterminer l'ensemble

$$\ker(f) = \{x \in D(f) : f(x) = 0\}.$$

Exemple 1.1.1

① Soit l'équation

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{avec} \quad a, b \text{ et } c \in \mathbb{R}.$$

Alors $\ker(f)$ contient au plus deux éléments et peut-être aussi vide.

②

$$f(x) = \sin(x), \quad \text{avec } D(f) = \mathbb{R}^+.$$

Les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont en nombre infini dénombrable et

$$\ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^+ / x = k\pi, \; k = 0, 1, \ldots\}.$$

③ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

On a alors

$$\ker(f) = \mathbb{R}^- \cup \; \{x = \tfrac{1}{k\pi}, \; k = 1, \ldots\}.$$

L'ensemble des solutions est infini non dénombrable.

1.1.1 Séparation des racines

On dit qu'une racine α de l'équation (1.1) est séparable, si on peut trouver un intervalle $[a, b]$ tel que α soit la seule racine de cette équation dans $[a, b]$, ou encore si : $\ker(f) \cap [a, b] = \{\alpha\}$.
Nous nous intéressons dans ce chapitre à la localisation et l'approximation des racines séparables de l'équation (1.1), nous opérerons en deux étapes :

❶ On cherche d'abord à séparer les racines.

❷ On essaie ensuite d'approximer cette racine.

On dispose de plusieurs méthodes pour séparer les racines d'une équation dont on cite

Méthode Graphique

Graphiquement, la racine α de l'équation (1.1) s'interprète comme l'abscisse du point de l'intersection de la courbe représentative de f et l'axe (ox).

Exemple 1.1.2
① Soit à résoudre graphiquement l'équation $f(x) = x^2 - a$, où $a > 0$ fixé et $D(f) = \mathbb{R}$. Les variations et la courbe représentative de f sont données par le tableau (1.1) et le graphe (1.2) suivants :

On voit que l'intersection du graphe avec l'axe (ox) permet de localiser les racines de l'équation $f(x) = 0$.

② Soit l'équation suivante :

TABLE 1.1 – Tableau des variations de la fonction $x \mapsto x^2 - a$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-a$	$\nearrow$	$+\infty$

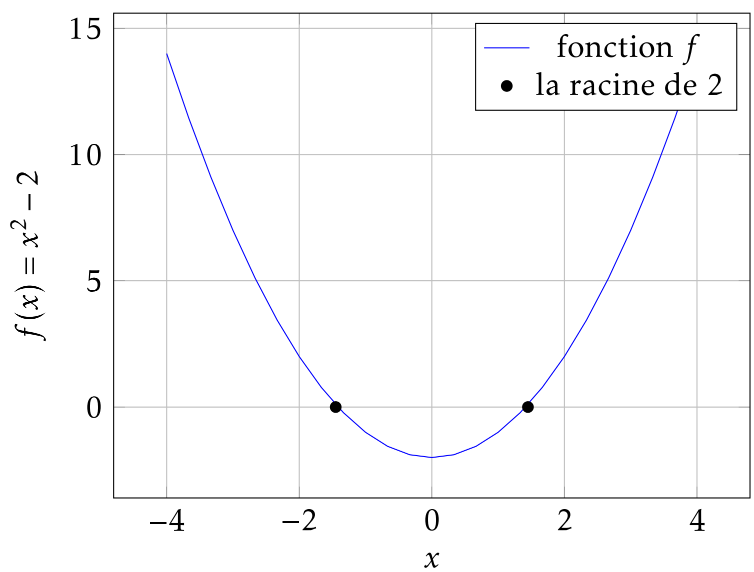

FIGURE 1.1 – Approximation des racines de l'équation $f(x) = 0$.

$$\begin{cases} x\log(x) = 1, \\ D(f) = \mathbb{R}_*^+, \end{cases} \tag{1.4}$$

cette équation s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \log(x) = \dfrac{1}{x}, \\ D(f) = \mathbb{R}_*^+, \end{cases} \tag{1.5}$$

en posant $f_1(x) = \log(x)$ et $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$, l'équation (1.4) devient équivalente à l'équation :

$$\begin{cases} f_1(x) - f_2(x) = 0, \\ D = \mathbb{R}_*^+, \end{cases} \tag{1.6}$$

Les variations des fonctions f_1 et f_2 sont données par les courbes ci-dessous.

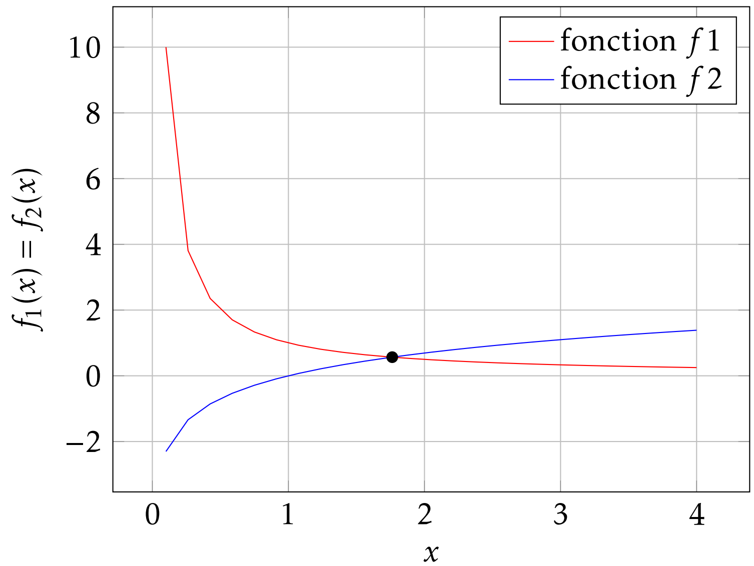

FIGURE 1.2 – Courbes des fonctions $f_1(x) = \log x$ et $f_2(x) = \frac{1}{x}$.

La racine de l'équation (1.4) peut être cherchée dans l'intervalle $[1, 2]$, elle correspond à l'abscisse du point d'intersection des courbes représentatives des fonctions f_1 et f_2.

Programme associé à la méthode en Scilab

```
  //  La séparation des racines par la méthode graphique.
a=2;
deff("[y]=f(x)","y=x^2-a")
    x = linspace(-2,2,50)';//x=[-2:h:2];h=(2-(-2))/50.
    scf(1);
    xlabel('$ x  $');
    ylabel('$ f_{ \nu}(x)$');
    xtitle('$\textcolor{black}{ Calcul \ de \ la \ racine \ de \ a=2 }$')
    legends([ '$ la \ racine \ de \ 2 $'],[-4],opt=5)
fplot2d(x,f,style=2)
xx=[-sqrt(a),sqrt(a)];
yy=[0,0];
plot2d(xx,yy,style=-4);
```

```
    // La séparation des racines par la méthode graphique.
deff("[y]=f(x)","y=log(x)");
deff("[y]=g(x)","y=1/x");
 xlabel('$ x  $');
 ylabel('$ y$');
```

```
  xtitle('$\textcolor{black}{ Calcul \ de \ la \ racine \ de \ f}$')
 legends(['$ la \ racine \ de \ f $'],[-4],opt=5)

x = linspace(0.1,4,100)';
fplot2d(x,f,style=2)
fplot2d(x,g,style=4)
xx=[1,2];
yy=[0,0];
xstring( 3.5,1.4, '$\log(x)$');
xstring( 3.7,-1, '$\dfrac{1}{x}$');
plot2d(xx,yy,style=-4);
```

Méthode par Balayage

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère une suite croissante finie $\{x_i\}_{0\le i\le n}$ de valeurs de x réparties sur l'intervalle $[a,b]$ contenu dans le domaine $D(f)$, et on appliquera le théorème des valeurs intermédiaires sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, avec si $f(x_i)\times f(x_{i+1}) < 0$, alors il existe au moins un nombre réel α_i entre x_i et x_{i+1}, vérifiant l'équation $f(x) = 0$.

La méthode consiste donc à déterminer parmi les quantités $f(x_i)\times f(x_{i+1})$, $i = 0,\dots,n$ celles qui sont négatives.

Remarque 1.1.1
La méthode par balayage ne permet pas de conclure qu'à l'existence d'(au moins) une racine dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Cette méthode ne permet pas la séparation des racines doubles, c'est à dire les réels α tels que $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ et $f''(\alpha) \neq 0$.

1.1.2 Approximation des racines, Méthodes itératives

Définition 1.1.2
On appelle méthode itérative un procédé de calcul de la forme

$$x_0 \in D(f), \qquad x_{k+1} = f(x_k), \;\; k = 0,1,\dots \tag{1.7}$$

dans lequel, on part d'une valeur approchée x_0 pour calculer x_1, puis à l'aide de x_1 on calcule x_2 et ainsi de suite.

La formule (1.7) est dite formule de récurrence.

Parmi les méthodes numériques en général et les méthodes itératives en particulier, les plus puissantes permettant la résolution approchée des équations de la forme $f(x) = 0$, figurent

① Méthode de Newton Raphson.

② Méthode de la sécante.

La méthode de bipartition (dichotomie) bien qu'elle figure parmi les méthode à convergence lente, sera aussi considérée à cause de sa simplicité et sa convergence globale.

Méthode de Newton Raphson

L'une des méthode connue d'analyse numérique pour résoudre les équations algébriques où les approximations successives des racines d'une fonction à valeurs réelles est la méthode de Newton Raphson. Cette dernière fonctionne bien pour des fonctions de classe C^2.

Soit f une fonction suffisamment régulières, par exemple de classe $C^2(]a,b[)$ au voisinage de la racine α. Le développement de Taylor d'ordre deux de la fonction f au voisinage d'une valeur approchée x_0 de α est :

$$f(\alpha) = f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0) + \underbrace{\frac{1}{2} f''(\xi)(\alpha - x_0)^2} \tag{1.8}$$

où

$$\begin{cases} \xi \in]\alpha, x_0[\\ \frac{1}{2} f''(\xi)(\alpha - x_0)^2 \quad \text{le reste de Lagrange.} \end{cases} \tag{1.9}$$

Comme $f(\alpha) = 0$, en supposant que $f'(x_0) \neq 0$, on aura

$$\alpha = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + \left[-\frac{1}{2} f''(\xi)(\alpha - x_0)^2 \right]. \tag{1.10}$$

En négligeant le reste $R_2 = -\frac{1}{2} f''(\xi)(\alpha - x_0)^2$, la quantité $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ dans (1.10) qu'on notera x_1 constitue alors une valeur approchée améliorée de α.

En itérant le procédé on trouve la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1 \ldots, \\ x_0 \text{ donnée.} \end{cases} \tag{1.11}$$

Cette dernière s'appelle Formule de Récurrence de Newton Raphson.

☛ Convergence de la Méthode de Newton : Le théorème suivant établit une convergence locale quadratique de la méthode de Newton.

Théorème 1.1.1 ([5], Théorème 5.17)
Soit f une fonction réelle de classe C^2 dans un voisinage d'un zéro simple ξ. Alors, la suite (x_k) définie par (1.11) converge au moins quadratiquement vers ξ, pour toute initialisation x_0 choisie suffisamment proche de ce zéro.

On peut aussi démontrer un résultat de convergence globale pour cette méthode dans le cas où la fonction f est strictement monotone et strictement convexe (ou concave).

Théorème 1.1.2 ([5], Théorème 5.18)
Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, changeant de signe sur $[a,b]$ telle que f' et f'' ne s'annulent pas sur $[a,b]$. Alors pour toute initialisation x_0 dans $[a,b]$ vérifiant $f(x_0)f''(x_0) \geq 0$ la suite (x_k) définie par (1.11) converge vers l'unique zéro de f dans $[a,b]$.

☛ Critère d'arrêt de la méthode de Newton : Soit x_k la suite des approximations obtenue à l'aide de la formule de Newton, grâce au développement de Taylor d'ordre 1 au voisinage de α, on a :

$$| \alpha - x_k | \leq | x_{k+1} - x_k | . \tag{1.12}$$

Exemple 1.1.3
Soit l'équation

$$f(x) = 1 - x\log(x), \quad x \in [1,2]. \tag{1.13}$$

On remarque que les hypothèses du Théorème 1.1.2 sont vérifiées, donc on peut lui appliquer la méthode de Newton, on obtient

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \dfrac{1 - x_k\log(x_k)}{1 + \log(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots \\ x_0 = a \text{ ou } b. \end{cases} \tag{1.14}$$

Choix de x_0 : Comme $f(2)f''(2) > 0$, on prend $x_0 = 2$.

Les cinq premières approximations de α obtenues par la méthode de Newton (1.14] sont enregistrées dans le tableau 1.2.

TABLE 1.2 – Approximations par la méthode de Newton Raphson

k	x_i	$\|x_{k+1} - x_k\|$
0	2.	.
1	1.7718483	0.2281517
2	1.7632362	0.0086121
3	1.7632228	0.0000134
4	1.7632228	3.238D-11
5	1.7632228	2.220D-16

Méthode de Bipartition (Dichotomie)

L'idée est de construire une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$ de plus en plus petits contenants une racine isolée de l'équation $f(x) = 0$. L'outil utilisé pour appliquer cette idée est le théorème des valeurs intermédiaires

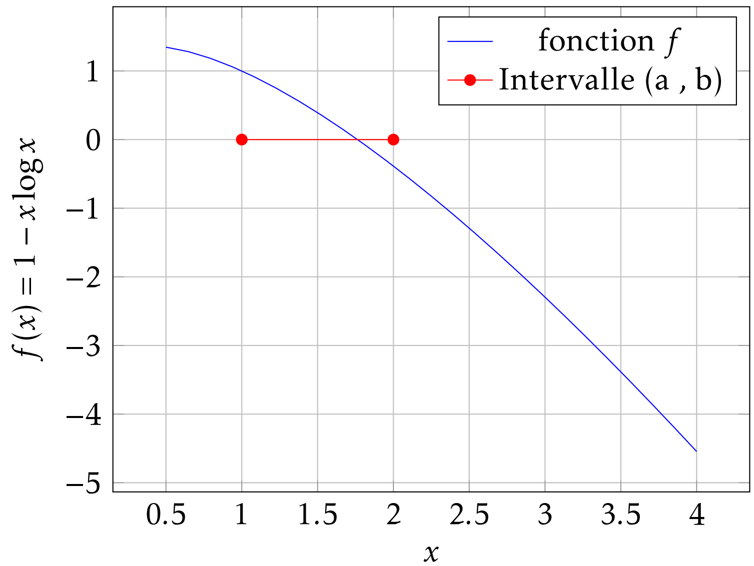

FIGURE 1.3 – Localisation de la racine de l'équation $1 - x\log x = 0$.

L'algorithme

Supposons que la racine $\alpha \in [a,b]$ avec $f(a) \times f(b) < 0$, on pose : $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $I_0 = [a_0, b_0]$.

On divise l'intervalle I_0 en deux et on construit l'intervalle I_1 comme suit :

Soit $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$, on calcule $f(x_0) \times f(a_0)$:

si $f(x_0) \times f(a_0) < 0$ alors : $I_1 = [a_1, b_1] = [a_0, x_0]$ sinon $I_1 = [a_1, b_1] = [x_0, b_0]$

on répète le procédé pour obtenir une suite d'intervalles emboîtés :

$I_k = [a_k, b_k]$, $k = 0, 1 \ldots$, comme suit :

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2},$$

$$I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, x_k] & \text{si } f(x_k)f(a_k) < 0, \\ [x_k, b_k] & \text{si } f(x_k)f(a_k) > 0. \end{cases} \tag{1.15}$$

enfin, on prend x_k comme approximation de la racine α.

☛ Critère d'arrêt de la méthode de dichotomie :

Soit x_k la suite des approximations obtenues à l'aide de la formule de Dichotomie, on a l'erreur commise sur x_k

$$\mid \alpha - x_k \mid \leq \frac{(b-a)}{2^{k+1}}, k = 0, 1 \ldots. \tag{1.16}$$

Remarque 1.1.2
Si on veut calculer une approximation x_k avec une erreur donnée ε, il suffit d'aller dans les itérations jusqu'à ce que n vérifie l'inégalité

$$\mid \alpha - x_n \mid \leq \frac{(b-a)}{2^{n+1}} \leq \varepsilon. \tag{1.17}$$

Autrement :

$$n \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\varepsilon})}{\log(2)} - 1. \tag{Nbiter}$$

Exemple 1.1.4
Soit à résoudre l'équation

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0. \tag{ex}$$

Pour la méthode de la bipartition (Dichotomie) :

❶ Le choix de l'intervalle de départ est un élément important de la méthode.

❷ Vaut mieux avoir un graphe pour commencer.

Les résultats de la méthode de bipartition appliquée à l'équation (ex) sont enregistrés dans le tableau 1.3.

TABLE 1.3 – Les dix premières approximations par la méthode de Bipartition (Dichotomie)

k	a_i	x_i	b_i	$f(x_i)$	$\frac{\lvert b-a \rvert}{2^{k+1}}$
0	1.	1.5	2.	- 1.875	0.5
1	1.5	1.75	2.	0.171875	0.25
2	1.5	1.625	1.75	- 0.9433594	0.125
3	1.625	1.6875	1.75	- 0.4094238	0.0625
4	1.6875	1.71875	1.75	- 0.1247864	0.03125
5	1.71875	1.734375	1.75	0.0220299	0.015625
6	1.71875	1.7265625	1.734375	- 0.0517554	0.0078125
7	1.7265625	1.7304688	1.734375	- 0.0149572	0.0039063
8	1.7304688	1.7324219	1.734375	0.0035127	0.0019531
9	1.7304688	1.7314453	1.7324219	- 0.0057282	0.0009766
10	1.7314453	1.7319336	1.7324219	-0.0011092	0.0004883

```
///  la méthode de bipartition ///
    Write('a and b  are the interval borders ')
    Write('eps  is the desired accuracy.')

function [y,eps1]=Bipartion(a,b,eps)

   // deff("[y]=f(x)","y=x^{3}+x^{2}-3*x-3");
   // deff("[y]=f(x)","y=x^{3}-1*x-1");
   // deff("[y]=f(x)","y=x^{2}-3");

deff("[y]=f(x)","y=exp(3*x)-x-30");
  y=[];
  a1=[];b1=[];
  eps=0.001;
  a=1;b=2;
  k=1;
while abs(b-a) >eps,
  x=(b+a)/2;
  y(k)=x;
 if (f(a)*f((b+a)/2)<0) then
     b=x;
```

```
  else
      a=x;
  //  a1(k)=a,

end
      b1(k)=b;
      a1(k)=a;
      k=k+1;
end; y
// presentation of the results in table A.
  for (l=1:k), eps1(l)=1/(2^{l}); end, eps1
  A=[[1;a1],[y;0],[2;b1],[f(y);0],eps1]
endfunction;
 Write('The Running of the programm ')
 Write('The result is ');
 Write('y is the root square of f(x)=0, with an accuracy eps=0.001 ');
 Write('We have finished normally.');
```

Méthode de Lagrange

Bien que la méthode de Newton est très utilisée dans la pratique, son principal inconvénient vient du fait de l'utilisation à chaque itération de la dérivée. quand la fonction f n'est pas définie explicitement, on n'a pas toujours accès à sa dérivée. Dans cette partie, nous allons proposer la méthode de Lagrange qui n'utilise pas la dérivée de f. L'idée de cette méthode est d'approcher la dérivée $f'(x_k)$ par une différence divisée.

Soit f une fonction continue au voisinage de la racine α. L'itération de la méthode de la sécante est donnée par la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{(f(b) - f(x_k))}(b - x_k), & k = 0, 1, \ldots \\ x_0 = a \text{ doit vérifier } f(x_0) \times f'(x_0) > 0 & \\ & \text{ou} \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{(f(x_k) - f(a))}(x_k - a), & k = 0, 1 \ldots, \\ x_0 = b \text{ donnée.} & \end{cases} \tag{1.18}$$

où $[a, b]$ est l'intervalle qui contient la racine.

La formule (3.21) s'appelle Formule de Récurrence de la sécante.

☛ Critère d'arrêt de la sécante :

Soit x_k la suite des approximations obtenues à l'aide de la formule sécante, on arrête le processus lorsque :

$$|f(x_k)| < \varepsilon. \tag{1.19}$$

Remarque 1.1.3

Le choix de x_0

❶ pour la la méthode de Newton, $x_0 = a$ si $f(a) \times f''(a) > 0$

❷ pour la la méthode de Lagrange, $x_0 = a$ si $f(a) \times f'(a) > 0$

Exemple 1.1.5

Résoudre l'équation

$$f(x) = x^3 - x - 4 = 0$$

.

Solution

En utilisant la méthode de Lagrange sur l'intervalle $[a, b] = [1, 2]$.

Le choix de x_0

On a $f(a = 1)f'(a = 1) = (-4)(2) < 0$, donc

$$x_0 = b = 2.$$

Ce qui nous permet d'écrire la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{(f(x_k) + 4)}(x_k - 1), \quad k = 0, 1, \ldots \\ x_0 = b = 2 \end{cases} \tag{1.20}$$

1.2 Applications

1.2.1 Calcul de $\sqrt{a}$, $a > 0$.

TABLE 1.4 – Approximations par la méthode de Lagrange

k	x_i	$f(x_i)$	$\lvert x_{k+1}-x_k\rvert$
0	2.	2.	0
1	1.6666667	- 1.037037	0.3333333
2	1.9	0.959	0.2333333
3	1.7259528	- 0.5844893	0.1740472
4	1.8501836	0.4833270	0.1242308
5	1.7585292	- 0.3204095	0.0916544
6	1.82458	0.2496153	0.0660508
7	1.7761456	- 0.1729513	0.0484345
8	1.811221	0.1305286	0.0350754
9	1.7855857	- 0.0925740	0.0256354
10	1.8041976	0.0686984	0.0186120
11	1.790619	- 0.0493276	0.0135786
12	1.8004906	0.0362794	0.0098716
13	1.7932955	- 0.0262205	0.0071951
14	1.79853	0.0191932	0.0052345

Méthode de Newton ($a=2$)

On définit la fonction $f(x)=x^2-2$, d'où $f'(x)=2x$. La méthode itérative de Newton sur l'intervalle $[a,b]=[1,2]$ est donnée par :

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{(x_k)^2-2}{2x_k}=\frac{(x_k)^2+2}{2x_k}, k=0,\dots$$

Notons que si $x_0>0$, alors $x_k>0$ pour tout k.

Il s'agit donc d'une méthode de point fixe pour la fonction

$$F(x)=\frac{x^2+2}{2x},\quad x>0$$

On montre que la suite x_k est positive, décroissante (à partir du deuxième terme) et bornée. Donc elle converge.

Le choix de x_0

D'après la formule du test on a $f(a=1)\times f''(a=1)<0$, on doit choisir $x_0=2$.

La racine exacte de $\sqrt{2}$ est $\boxed{Ve=1.414213562373095..}$

Table 1.5 – Approximations de $\sqrt{2}$ par la méthode de Newton Raphson.

k	x_i	$f(x_i)$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	2.	2.	$\cdots$
1	1.5	0.25	0.5
2	1.4166667	0.0069444	-0.0833333
3	1.4142157	0.0000060	0.0024510
4	1.4142136	4.511D-12	0.0000021
5	1.4142136	4.441D-16	1.595D-12
6	1.4142136	- 4.441D-16	2.220D-16
7	1.4142136	4.441D-16	2.220D-16

1.2.2 Calcul de valeurs propres d'une matrice

On sait que les valeurs propres d'une matrice sont les racines du polynôme caractéristique. Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A est donné par :

$$P(\lambda) = |A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda. \tag{1.22}$$

Les valeurs propres sont : $\boxed{0, 2 \text{ et } 3}$.

On commence par la séparation des racines

☛ Tracer la courbe représentative du polynôme $P(\lambda)$.

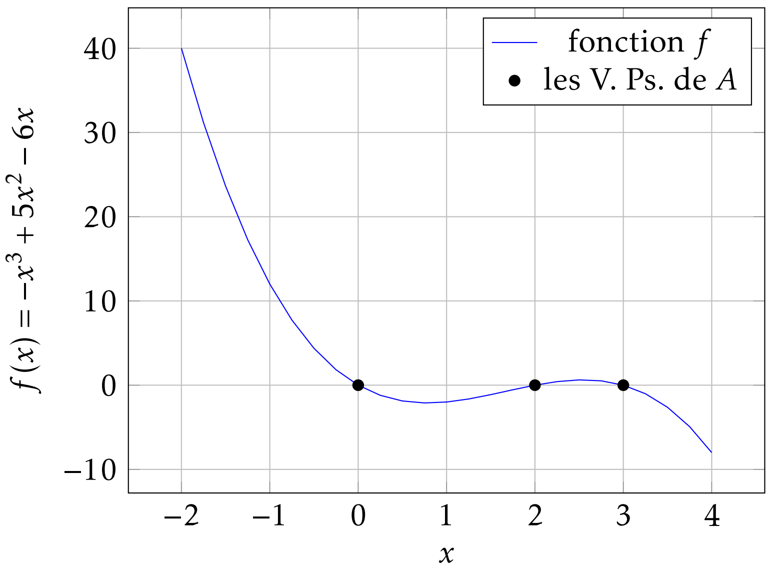

FIGURE 1.4 – Courbe du polynôme caractéristique $P(\lambda)$ de la matrice A sur l'intervalle $[-2,4]$.

TABLE 1.6 – Approximations de la première valeur propre $\lambda_1 = 0$ par la méthode de Newton Raphson avec $[a,b] = [-0.5, 0.5]$

k	x_i	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	-0.5	$\cdots$
1	- 0.1276596	0.3723404
2	- 0.0116915	0.1159681
3	- 0.0001122	0.0115792
4	- 1.050D-08	0.0001122
5	- 9.184D-17	1.050D-08
6	- 1.233D-32	9.184D-17
7	0.	1.233D-32

Chapitre 2

Interpolation polynomiale des fonctions

Introduction et Définitions

Soit $y = f(x)$ une fonction tabulée telle que :

TABLE 2.1 – La fonction tabulée f

x_k	x_0	x_1	...	x_n
$y_k = f(x_k)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	...	$f(x_n)$

On veut calculer une approximation $f_h(x)$ de la fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $[a = x_0, b = x_n]$. La méthode d'interpolation consiste à déterminer une fonction $f_h(x)$ qui prend les mêmes valeurs que la fonction $f(x)$ aux points $(x_k)_{0\leq k\leq n}$, c'est à dire :

$$f_h(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots n$$

Dans le cas où $f_h(x)$ est un polynôme alors $f_h(x) = p_n(x)$ s'appelle l'interpolation polynomiale de $f(x)$ d'ordre n aux points $(x_k)_{0\leq k\leq n}$.

Après la détermination de $f_h(x)$; il faut estimer l'erreur commise sur cette approximation

$$\|f_h(x) - f(x)\| = \varepsilon(x).$$

2.0.1 Interpolation

Soit $y = f(x)$ une fonction dont on ne connaît que les valeurs (y_k) qu'elle prend aux $(n+1)$ points distincts x_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, donc on a :

$$y_k = f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

Position du Problème :

Déterminer un polynôme $p_n(x)$ de degré inférieur où égal à n, tel que :

$$P_n(x_k) = y_k = f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{2.2}$$

de manière à pouvoir estimer les valeurs $f(x)$ au moyen de $p_n(x)$ pour tout $x \in [x_0 = \min x_k, x_n = \max x_k]$; c'est ce qu'on appelle

l'interpolation de la fonction $f(x)$ par le polynôme $p_n(x)$ aux points $x_k, k = 0, 1, \ldots, n$

Question : Un tel polynôme, existe-t-il ? si oui, est-il unique ?

Théorème 2.0.1

Soit $f(x)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que $y_k = f(x_k), k = 0, 1, \ldots, n$, alors il existe un polynôme unique $P_n(x)$ tel que $P_n(x_k) = y_k = f(x_k), k = 0, 1, \ldots, n$.

Preuve

L'existence de $P_n(x)$ est équivalente à l'existence des coefficients $a_k, k = 0, 1, \ldots n$, tel que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$$

.

D'après la relation (2.0.6), les coefficients $a_k, k = 0, 1, \ldots n$, vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n & = & y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n & = & y_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 + \cdots + a_n x_k^n & = & y_k \\ \vdots & & \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n & = & y_n \end{cases} \tag{2.3}$$

c'est un système linéaire de déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \cdots & x_k^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}. \tag{2.4}$$

L'opérateur Δ est appelé le déterminant de **Vander Monde**, qui n'est pas nul ($\Delta \neq 0$), car les x_i sont distincts, d'où l'existence et l'unicité de la solution du système 2.3 (le vecteur des coefficients du polynôme de l'interpolation).

Exemple 2.0.1
Déterminer le polynôme d'interpolation de la fonction tabulée suivante :

TABLE 2.2 – Valeurs de f aux points x_i

x_k	$x_0 = 1$	$x_1 = 2$	$x_{n=2} = 5$
$y_k = f(x_k)$	$y_0 = 0$	$y_1 = -9$	$y_{n=2} = 18$

D'après la relation (2.0.6), on a

$$P_2(x_k) = y_k, k = 0, 1, 2 \tag{2.5}$$

et

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{k=2} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

L'équation (2.5) s'écrit sous la forme matricielle $AX = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$$b = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 18 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

la solution de ce système est donné par

$$X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 18 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

En utilisant la commande `linsolve` de Scilab, on obtient :

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -22.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

et par conséquent la forme explicite de P_2 est :

$$\boxed{P_2(x) = 18 - 22.5x + 4.5x^2.}$$

Remarque 2.0.1
Si n est un entier naturel assez grand, alors cette méthode consiste à résoudre un système linéaire $(n+1)\times(n+1)$ qui est difficile. Donc il faut chercher d'autres techniques.

2.0.2 Interpolation de Lagrange

Soit $f(x)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que $y_k = f(x_k), k = 0, 1, \ldots, n$.
Pour $k = i$ fixe, on considère le problème partiel suivant :
Construire un polynôme $L_i(x)$ de degré n, tel que

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \tag{2.10}$$

Le polynôme $L_i(x)$ s'annule en n points $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, donc il s'écrit sous la forme

$$L_i(x) = K_i(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n) \tag{2.11}$$

où K_i est une constante.
Pour $x = x_i$, d'une part $L_i(x_i) = 1$, et d'autre part,

$$L_i(x_i) = K_i(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot(x_i-x_n).$$

Par conséquent

$$K_i = \frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot(x_i-x_n)} \tag{cte}$$

,

d'où

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot(x_i-x_n)} \tag{2.12}$$

La suite $L_i(x)_{0\leq i\leq n}$ est appelée la base de Lagrange de l'espace des polynôme de degré $\leq n$ $P_n[X]$.

Passons à présent à la résolution du problème d'interpolation qui consiste à chercher $P_n(x)$ vérifiant les conditions indiquées plus haut, c - à - d

$$P_n(x_i) = y_i, \quad 0 \leq i \leq n$$

.

Ce polynôme s'écrit sous la forme :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \alpha_i L_i(x)$$

La condition (2.2) nous donne

$$y_j = P_n(x_j) = \sum_{i=0}^{i=n} \alpha_i L_i(x_j) = \alpha_j L_j(x_j) = \alpha_j, \qquad j = 0, \ldots, n. \tag{2.13}$$

Finalement, on obtient

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} y_i L_i(x).}$$

Exemple 2.0.2
Construire le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $\sin(\pi x)$ aux points $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.

Table 2.3 – Valeurs de $f(x) = \sin(\pi x)$ aux points x_i

x_k	$x_0 = 0$	$x_1 = \frac{1}{6}$	$x_2 = \frac{1}{2}$
$y_k = f(x_k)$	$y_0 = 0$	$y_1 = \frac{1}{2}$	$y_2 = 1$

On a :
$n = 2, P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$

- $$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\ &= \frac{(x-1/6)(x-1/2)}{(0-1/6)(0-1/2)} \\ &= 12(x-1/6)(x-1/2). \end{aligned} \tag{2.14}$$

- $$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ &= \frac{(x-0)(x-1/2)}{(1/6-0)(1/6-1/2)} \\ &= -18(x-0)(x-1/2). \end{aligned} \tag{2.15}$$

▶

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &= \frac{(x-0)(x-1/6)}{(1/2-0)(1/2-1/6)} \\ &= 6(x-0)(x-1/6). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Donc, $P_2(x) = -3x^2 + \frac{7}{2}x.$

▶ Déduire une valeur approximative vp de $\sin(\pi/3)$.

$\sin(\pi/3) \simeq P_2(1/3) = \frac{7}{2}(1/3) - 3(1/3)^2 = 0.8333333$

La valeur exacte est $\boxed{\sin(\pi/3) = 0.8660254\ldots}$

2.0.3 Interpolation de Newton

Différences divisées

Soit $f(x)$ une fonction dont on connaît les valeurs $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ qu'elle prend aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Définition On définit les différences divisées de f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ par les relations de récurrences :

$$(D.Div) \begin{cases} \delta^0(x_i) &= f(x_i) \\ \delta^1(x_i, x_{i+1}) &= \dfrac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} = \dfrac{\delta^0(x_i) - \delta^0(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} \\ \delta^2(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) &= \dfrac{\delta^1(x_i, x_{i+1}) - \delta^1(x_{i+1}, x_{i+2})}{x_i - x_{i+2}} \\ \vdots & \\ \delta^p(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p}) &= \dfrac{\delta^{p-1}(x_i, \ldots, x_{i+p-1}) - \delta^{p-1}(x_{i+1}, \ldots, x_{i+p})}{x_i - x_{i+p}} \end{cases} \tag{2.17}$$

La dernière relation du système (2.17) est appellée Différences Divisées d'ordre p de la fonction aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Calcul des Différences Divisées

Exemple 2.0.3

Considérons la fonction tabulée suivante :

☛ Calculer les Différences Divisées d'ordre p avec $p = 0, 1, 2$ de la fonction présentée au-dessus.

TABLE 2.4 – Différences Divisées d'ordre $p, p = 1,2,3,4$

x_i	$\delta^0(x_i)$	$\delta^1(x_i,x_{i+1})$	$\delta^2(x_i,x_{i+1},x_{i+2})$	$\delta^3(x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3})$	$\delta^4(x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3},x_{i+4})$
x_0	$f(x_0)$				
		$\delta^1(x_0,x_1)$			
x_1	$f(x_1)$		$\delta^2(x_0,x_1,x_2)$		
		$\delta^1(x_1,x_2)$		$\delta^3(x_0,x_1,x_2,x_3)$	
x_2	$f(x_2)$		$\delta^2(x_1,x_2,x_3)$		$\delta^4(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)$
		$\delta^1(x_2,x_3)$		$\delta^3(x_0,x_1,x_2,x_3)$	
x_3	$f(x_3)$		$\delta^2(x_2,x_3,x_4)$		
		$\delta^1(x_3,x_4)$			
x_4	$f(x_3)$				

TABLE 2.5 – La fonction tabulée f

x_k	$x_0 = 0$	$x_1 = 2$	$x_2 = 4$
$y_k = f(x_k)$	$f(x_0) = 1$	$f(x_1 = 5$	$f(x_2) = 17$

TABLE 2.6 – Différences Divisées d'ordre $p, p = 0,1,2$

x_i	$\delta^0(x_i)$	$\delta^1(x_i,x_{i+1})$	$\delta^2(x_i,x_{i+1},x_{i+2})$
0	$\delta^0(x_0) = 1$		
		$\delta^1(x_0,x_1) = \dfrac{\delta^0(x_0) - \delta^0(x_1)}{x_0 - x_1} = 2$	
2	$\delta^0(x_1) = 5$		$\delta^2(x_0,x_1,x_2) = \dfrac{\delta^1(x_0,x_1) - \delta^1(x_1,x_2)}{x_0 - x_2} = 1$
		$\delta^1(x_1,x_2) = \dfrac{\delta^0(x_1) - \delta^0(x_2)}{x_1 - x_2} = 6$	
4	$\delta^0(x_2) = 17$		

Base de Newton $N_i(x)$

Les polynômes $N_i(x), i = 0,1,\ldots,n$ de la base de Newton sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} N_0(x) &= 1 \\ N_i(x) &= \prod_{k=0}^{k=i-1} (x - x_k) \quad 1 \le i \le n. \end{aligned} \tag{2.18}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
N_0(x) &= 1\\
N_1(x) &= (x-x_0)\\
N_2(x) &= (x-x_0)(x-x_1)\\
&\vdots\\
N_i(x) &= (x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_{i-1})\\
&\vdots\\
N_n(x) &= (x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_{n-1})
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Polynôme d'interpolation de Newton

Théorème 2.0.2
Soit f une fonction définie sur $[x_0, x_n]$ et $x_0, x_1, \ldots x_n$ une suite de points distincts tels que

$$f(x_i) = y_i, i = 0, 1, \ldots, n \quad \text{et} \quad x_i < x_{i+1}, \forall 0 \leq i \leq n-1 \tag{2.20}$$

alors, l'interpolation de Newton est donnée par la formule suivante :

$$P_n(x) = \delta^0(x_0)N_0(x) + \delta^1(x_0, x_1)N_1(x) + \delta^2(x_0, x_1, x_2)N_2(x) + \cdots. + \delta^n(x_0, \ldots.., x_n)N_n(x)$$

où $\delta^p(x_0, \ldots, x_p)$ est la différence divisée d'ordre p.

Preuve

Comme $(N_i)_{0\leq i\leq n}$ est une base de $P_n[X]$, alors :

$$P_n(x) = \sum_{0\leq i\leq n} \alpha_i N_i(x)$$

Il suffit de déterminer la suite des coefficients $(\alpha_i)_{0\leq i\leq n}$, d'après la formule d'interpolation, le polynôme $P_n(x)$ doit vérifier

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, i = n$$

pour $i = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
P_n(x_0) = y_0 = \quad & \alpha_0 N_0(x_0) + \alpha_1 N_1(x_0) + \ldots. + \alpha_n N_n(x_0)\\
& = \alpha_0 + \alpha_1.0 + \ldots. + \alpha_n.0\\
& = \alpha_0.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

pour $i = 1$,

$$\begin{aligned}
P_n(x_1) = y_1 \quad &= \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0)\\
&= y_0 + \alpha_1(x_1 - x_0)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

d'où

$$\alpha_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \delta^1(x_0, x_1)$$

et ainsi de suite, jusqu'à $i = n$;

$$\alpha_n = \delta^n(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Exemple 2.0.4
Soif $f(x)$ la fonction tabulée donnée par le tableau 2.5. Les différences divisées sont enregistrées dans le tableau 2.6. Le polynôme d'interpolation de Newton est

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{i=2} \alpha_i N_i(x)$$

où

$$\alpha_0 = \delta^0(x_0) \quad \alpha_1 = \delta^1(x_0, x_1) \quad \alpha_2 = \delta^2(x_0, x_1, x_2).$$

Les coefficients α_i sont situés dans la diagonale de la matrice des différences divisées. Autrement

$$P_2(x) = 1 + 2(x-0) + (x-0)(x-2).$$

Relation entre différences divisées et dérivées

Théorème 2.0.3
Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle $[a, b]$ contenant les points $x_0, x_0, \ldots, x_n$, alors il existe $\xi \in [a, b]$ tel que :

$$\delta^n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f^n(\xi)}{n!}.$$

Erreurs d'interpolation

Théorème 2.0.4
Soit f une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur un intervalle $[a, b]$ contenant les points $x_0, x_0, \ldots, x_n$, alors pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in [a, b]$, tel que :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{k=n} (x - x_k).$$

Remarque 2.0.2
La formule précédente ne permet pas de calculer la valeur exacte d'erreur, parce que en général ξ est inconnu, mais elle permet d'encadrer l'erreur.

Corollaire 2.0.1
Sous l'hypothèse du théorème précédent, on a :

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\prod_{k=0}^{k=n}(x - x_i)|$$

, où

$$M_{n+1} = \sup_{x\in[a,b]} |f^{n+1}(x)|.$$

Deuxième formule d'interpolation de Newton

Cette deuxième formule est un cas particulier de la première formule lorsque les point d'interpolation sont équidistants. Supposons que les points d'interpolation sont équidistants, alors il existe un réel h tel que $x_i = x_0 + ih$, où x_0 est donné.

Définition Soit y_i, $i = 0, \ldots, n$ une suite de nombres réels, on appelle différence finie progressive d'ordre p, $p = 1, \ldots, n$, le système suivant :

$$(D.fini) \quad \begin{cases} \Delta^0 y_i &= y_i, & i = 0, \ldots, n \\ \Delta^1 y_i &= y_{i+1} - y_i, & i = 0, \ldots, n-1 \\ \Delta^2 y_i &= \Delta^1 y_{i+1} - \Delta^1 y_i, & i = 0, \ldots, n-1 \\ &\vdots & \\ \Delta^p y_i &= \Delta^{p-1} y_{i+1} - \Delta^{p-1} y_i, & i = 0, \ldots, n-1 \end{cases} \tag{2.23}$$

La dernière relation du système (2.23) est appelée différences finies d'ordre p de la suite $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Théorème 2.0.5
Soit f une fonction définie sur $[x_0, x_n]$ et soit $x_i = x_0 + ih$, $h > 0$, $i = 0, \ldots, n$, une suite de points tels que

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots., n. \tag{2.24}$$

Alors

$$\delta^k(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) = \frac{\Delta^k f(x_i)}{h^k k!}, \ 0 \leq i \leq i + k \leq n.$$

Preuve

Pour simplifier, on prend $i = 0$ et donc on va montrer que :

$$\delta^k(x_0, x_1, \ldots, x_k) = \frac{\Delta^k f(x_0)}{h^k k!}, \ 0 \leq k \leq n. \tag{2.25}$$

La preuve est par récurrence.

☛ pour $k=1$, on a

$$\delta^1(x_0,x_1)=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=\frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1}, \tag{2.26}$$

Donc cette relation est vraie pour $k=1$.

☛ Supposons que la relation (2.26) est vérifiée pour les différences finies d'ordre k, et montrons qu'elle reste vérifiée pour les différences finies d'ordre $k+1$

$$\begin{aligned}\delta^{k+1}(x_0,x_1,\ldots,x_k,x_{k+1}) &= \frac{\delta^k(x_0,x_1,\ldots,x_k)-\delta^k(x_1,x_2,\ldots,x_k,x_{k+1})}{x_0-x_{k+1}}\\ &= \frac{\Delta^k f(x_1)-\Delta^k f(x_0)}{(k+1)h}\\ &= \frac{\Delta^{k+1} f(x_0)}{(k+1)!h^{k+1}}\end{aligned} \tag{2.27}$$

donc la relation (2.25) est vraie pour tout k.

Théorème 2.0.6

Soit f une fonction définie sur $[x_0,x_n]$ et soit $x_i=x_0+ih,\ h>0,\ \ i=0,\ldots,i=n$ une suite des points tels que

$$f(x_i)=y_i, i=0,1,\ldots,n. \tag{2.28}$$

Alors, le polynôme d'interpolation de Newton de f aux points x_i peut s'écrire sous la forme

$$p_n(x)=\frac{\Delta^0 f(x_0)}{0!h^0}N_0(x)+\frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1}N_1(x)+\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}N_2(x)+\cdots.+\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}N_n(x).$$

Exemple 2.0.5

Soient les deux fonctions définies par :

$$f(x)=\sqrt{x-1}\ \text{ et }\ g(x)=\sin\Big(\frac{\pi}{2}(x-1)\Big). \tag{2.29}$$

☛ Déterminer le polynôme d'interpolation de Newton aux points $x_0=1, x_1=\frac{3}{2}$ et $x_2=2$.

On remarque que $x_{i+1}-x_i=h=\frac{1}{2}$. On utilise la deuxième formule de Newton.

☛ Calculer les Différences finies d'ordre $p, p=0,1,2$.

☛ Le polynôme d'interpolation de Newton.

$$P_2(x)=\frac{\Delta^0 f(x_0)}{0!h^0}N_0(x)+\frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1}N_1(x)+\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}N_2(x)$$

TABLE 2.7 – La fonction tabulée f

x_k	$x_0 = 1$	$x_1 = \frac{3}{2}$	$x_{n=2} = 2$
$y_k = f(x_k)$	$f(x_0) = 0$	$f(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$f(x_2) = 1$
$y_k = g(x_k)$	$g(x_0) = 0$	$g(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$g(x_2) = 1$

TABLE 2.8 – Différences finies d'ordre $p, p = 0, 1, 2$

x_i	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$
1	$\Delta^0 f(x_0) = 0$		
		$\Delta^1 f(x_0) = \Delta^0 f(x_1) - \Delta^0 f(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\frac{3}{2}$	$\Delta^0 f(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$		$\Delta^2 f(x_0) = 1 - \sqrt{2}$
		$\Delta^1 f(x_1) = \Delta^0 f(x_2) - \Delta^0 f(x_1) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	
2	$\Delta^0 f(x_2) = 1$		

$$P_2(x) = \sqrt{2}(x-1) + 2(1-\sqrt{2})(x-1)(x-\tfrac{3}{2})$$

☛ Calculer une valeur approximative de $\sqrt{\frac{1}{4}}$. On a :

$$f(\tfrac{5}{4}) = \sqrt{\tfrac{5}{4} - 1} = \sqrt{\tfrac{1}{4}} = 0.5$$

.

$$P_2(\tfrac{5}{4}) = \sqrt{2}(\tfrac{5}{4} - 1) + 2(1-\sqrt{2})(\tfrac{5}{4} - 1)(\tfrac{5}{4} - \tfrac{3}{2}) = 0.4053302$$

.

Exemple 2.0.6
Soit la fonction définie par le tableau suivant :

☛ Déterminer le polynôme d'interpolation de Newton aux points $x_0 = 2, x_1 = 5$ et $x_2 = 8$.

On remarque que $x_{i+1} - x_i = h = 3$. On utilise la deuxième formule de Newton. ☛ Calculer les différences finies d'ordre $p, p = 0, 1, 2$.

☛ Le polynôme d'interpolation de Newton.

TABLE 2.9 – La fonction tabulée f

x_k	$x_0 = 2$	$x_1 = 5$	$x_2 = 8$
$y_k = f(x_k)$	$f(x_0) = -9$	$f(x_1) = 18$	$f(x_2) = 35$

TABLE 2.10 – Différences finies d'ordre $p, p = 0, 1, 2$

x_i	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$
2	$\Delta^0 f(x_0) = -9$		
		$\Delta^1 f(x_0) = \Delta^0 f(x_1) - \Delta^0 f(x_0) = 27$	
5	$\Delta^0 f(x_1) = 18$		$\Delta^2 f(x_0) = \Delta^1 f(x_1) - \Delta^1 f(x_0) = -10$
		$\Delta^1 f(x_1) = \Delta^0 f(x_2) - \Delta^0 f(x_1) = 17$	
8	$\Delta^0 f(x_2) = 35$		

$$P_2(x) = \frac{\Delta^0 f(x_0)}{0!h^0} N_0(x) + \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1} N_1(x) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} N_2(x)$$

$$P_2(x) = -9 + \tfrac{27}{2}(x-2) - \tfrac{10}{8}(x-2)(x-5) = -\tfrac{1}{9}(293 - 116x + 5x^2)$$

L'erreur d'interpolation dans le cas présent

Corollaire 2.0.2
Sous l'hypothèse du théorème (2.0.6), on a :

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} t(t-1)(t-2)\dots(t-n)$$

où

$$M_{n+1} = \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

et $t = x - x_0$

```
///  interpolation de Newton ///
     Write('X nodes,Y values')
     Write('n is the number of nodes, (n-1) is the degree.')
```

```
    Write('P is the numerical Newton polynomial.')

function[P]=newton(X,Y)
n=length(X);
       for j=2:n, for i=1:n-j+1,
                 Y(i,j)=(Y(i+1,j-1)-Y(i,j-1))/(X(i+j-1)-X(i));
           end,
       end,
x=poly(0,"x");
P=Y(1,n);
       for i=2:n,
              P=P*(x-X(i))+Y(i,n-i+1);
       end
endfunction;
 Write('The Running of the programm ')
   X=[0;2;4]; Y=[1;5;17];
   P=newton(X,Y);
   Write('The interpolation Newton
                    polynomial is '); Write('We have finished normally.');

 P  =

                2
 3.5x  - 3x

X=[1;3/2;2]; Y=[0;\sqrt((3/2)-1);\sqrt(2-1)]; P=newton(X,Y)
 P  =

                                             2
  - 2.6568542 + 3.4852814x - 0.8284271x

 X=[2;5;8]; Y=[-9;18;35]; P=newton(X,Y)
 P  =

                                             2
  - 32.555556 + 12.888889x - 0.5555556x

 Write('P is the numerical Newton polynomial ');
```

Chapitre 3

Approximation au sens des moindres carrées

3.0.1 Notions et Définitions

Produit scalaire discret

On considère l'ensemble de points $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ et un ensemble de nombres réels positifs $\{w_0, w_1, \ldots, w_n\}$.
Soient f et g deux fonctions réelles, on définit le produit scalaire discret entre f et g aux points $x_i, i = 0, \ldots, n$ avec les poids $\{w_0, w_1, \ldots, w_n\}$ par :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{i=n} w_i f(x_i) g(x_i).$$

Norme discrète d'une fonction

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{i=0}^{i=n} w_i f(x_i)^2.$$

L'orthogonalité

Définition On dit que f et g sont orthogonales par rapport au produit scalaire discret si

$$\langle f, g \rangle = 0.$$

Exemple 3.0.1

☛ Calculer le produit scalaire des fonctions tabulées suivantes ainsi que leurs normes, en supposant que $w(x) = 1$.

TABLE 3.1 – Calcul du produit scalaire

x_i	1	2	3	4	$\langle , \rangle$
$f(x_i)$	$f(x_1)=1$	$f(x_2)=3$	$f(x_3)=4$	$f(x_4)=5$	$\|f\|^2 = .$
$g(x_i)$	$g(x_1)=1$	$g(x_2)=\sqrt{3}$	$g(x_3)=\sqrt{4}$	$g(x_4)=3$	$\|g\|^2 = .$
$f(x_i)g(x_i)$	.	.	.	.	$\langle f,g \rangle =$

3.0.2 Polynômes Orthogonaux

Soit $P_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$ défini sur $\mathbb{R}$.

On dit qu'une famille de polynômes $p_0, p_1, \ldots, p_k$ de degré inférieur ou égal à n est orthogonale si et seulement si :

$$\langle p_i, p_j \rangle \quad = \quad 0 \qquad \text{si } i \neq j \tag{3.1}$$

Remarque 3.0.1
Pour simplifier, on suppose dans toute la suite que les poids w_i sont égaux à 1.

Exemple 3.0.2
Soient les polynômes $p_0(x) = 1$ et $p_1(x) = x$. Considérons l'ensemble des points $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$.

☛ Les polynômes p_0 et p_1. sont-ils orthogonaux ?

TABLE 3.2 – produit scalaire

x_i	0	1	2	$\langle , \rangle$
$p_0(x_i)$	1	1	1	$\|p_0\|^2 = 3$
$p_1(x_i)$	0	1	2	$\|p_1\|^2 = 5$
$p_0(x_i)p_1(x_i)$	0	1	2	$\langle p_0, p_1 \rangle = 3$

On remarque que les polynômes $p_0(x) = 1$ et $p_1(x) = x$ ne sont pas orthogonaux par rapport au produit scalaire défini par les points x_0, x_1 et x_2.

Exemple 3.0.3
☛ $p_0(x) = 1, p_1(x) = x - 1$ et l'ensemble des points $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$. Le lecteur peut vérifier en faisant un calcul similaire au précédent que les polynômes $p_0(x)$ et $p_1(x)$ sont orthogonaux.

TABLE 3.3 – produit scalaire

x_i	0	1	2	$\langle , \rangle$
$p_0(x_i)$	1	1	1	$\|p_0\|^2 = 3$
$p_1(x_i)$	-1	0	1	$\|p_1\|^2 = 2$
$p_0(x_i)p_1(x_i)$	-1	0	1	$\langle p_0, p_1 \rangle = 0$

Théorème 3.0.1 (Orthogonalisation de Gram Schmidt)
Soit $\{x_0, \ldots, x_n\}$ un ensemble de points et $A = \{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$ l'ensemble de polynômes tels que

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= x - a_1 \\ p_i(x) &= (x - a_i)p_{i-1}(x) - b_i p_{i-2}(x) \qquad i = 2, \ldots, k \end{aligned} \tag{3.2}$$

où

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\langle x p_{i-1}(x), p_{i-1}(x) \rangle}{\langle p_{i-1}(x), p_{i-1}(x) \rangle} \qquad i = 1, \ldots, k \\ b_i &= \frac{\langle x p_{i-1}(x), p_{i-2}(x) \rangle}{\langle p_{i-1}(x), p_{i-1}(x) \rangle} \qquad i = 2, \ldots, k \end{aligned} \tag{3.3}$$

Les polynômes $p_0, \ldots, p_k$ sont de degré inférieurs ou égal à k et l'ensemble A ainsi construit forme un système orthogonal par apport aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Exemple 3.0.4
☛ Construire une base orthogonale $A = \{p_0(x), p_1(x), p_2(x)\}$ de l'espace $\mathcal{P}_2[X]$, associée aux points $x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1$?

- ► $p_0(x) = 1$
- ► $p_1(x) = x - a_1$,

$$a_1 = \frac{\langle x p_0(x), p_0(x) \rangle}{\langle p_0(x), p_0(x) \rangle} = \frac{0}{4} = 0$$

- ► $p_1(x) = x$
- ► $b_2 = \frac{\langle x p_1(x), p_0(x) \rangle}{\langle p_1(x), p_1(x) \rangle}$
- ► $b_2 = 1$ ► $p_2(x) = x^2 - 1$ ► $p_0(x) = 1 \quad p_1(x) = x$ et $p_2(x) = x^2 - 1$ forme une base orthgonale sur $\mathcal{P}_2[X]$.

3.0.3 Approximation des fonctions au sens des moindres carrées

Table 3.4 – Construction d'une base des polynômes orthogonaux en utilisant l'algorithme de Gram

x_i	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\langle\,,\,\rangle$
$p_0(x_i)$	1	1	1	1	$\langle p_0, p_0 \rangle = \|p_0\|^2 = 4$
$x_i p_0(x_i)$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\|xp_0\|^2 = \dots$
$x_i p_0(x_i) p_0(x_i)$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\langle xp_0, p_0 \rangle = 0$
$a_1 = 0$					
$p_1(x_i)$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\langle p_1, p_1 \rangle = \|p_1\|^2 = \frac{5}{2}$
$x_i p_1(x_i)$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	
$x_i p_1(x_i) p_1(x_i)$	-1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1	$\langle xp_1, p_1 \rangle = 0$
$a_2 = 0$					
$p_0(x_i)$	1	1	1	1	
$x_i p_1(x_i)$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	
$x_i p_1(x_i) p_0(x_i)$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$\langle xp_1, p_0 \rangle = \frac{5}{2}$
$b_2 = 1$					

Formulation du problème

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, f étant connue aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$:

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n$$

■ On cherche un polynôme $P^* \in \mathcal{P}_k[X]$ qui vérifie :

$$\|f - P^*\| \quad \leq \quad \|f - P\| \qquad \forall P \in \mathcal{P}_k[X]. \tag{3.4}$$

Donc, P^* rend le membre gauche de (3.4) minimum, c'est à dire P^* est solution du problème de minimisation suivant :

$$(\mathcal{P}_\mathcal{N}) \quad \begin{cases} \text{Trouver } P^* \in \mathcal{P}_k[X] \text{ tel que} \\ \|f - P^*\| = \min\limits_{P \in \mathcal{P}_k[X]} \|f - P\|. \end{cases} \tag{3.5}$$

En exprimant la norme en fonction du produit scalaire, on trouve le problème équivalent suivant :

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{S}}) \quad \begin{cases} \text{Trouver } P^* \in \mathcal{P}_k[X] \text{ tel que} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} [f(x_i) - P^*(x_i)]^2 = \min_{P \in \mathcal{P}_k[X]} \sum_{i=0}^{i=n} [f(x_i) - P(x_i)]^2. \end{cases} \tag{3.6}$$

Ce polynôme s'il existe, s'appelle *approximation au sens des moindres carrées* de la fonction f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Meilleure approximation au sens (M.C) dans une base orthogonale

Théorème 3.0.2 (Coefficients dans une base orthogonale)
Soit $A = \{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$ un ensemble de polynômes orthogonaux associés aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Le polynôme P_k^* qui est la meilleure approximation d'une fonction f au sens des moindres carrées aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$, s'écrit :

$$P_k^*(x) = a_0^* p_0(x) + a_1^* p_1(x) + \cdots + a_k^* p_k(x) = \sum_{i=0}^{i=k} a_i^* p_i(x) \tag{3.7}$$

où

$$a_i^* = \frac{\langle f, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle} = \frac{\sum_{j=0}^{j=n} f(x_j) p_i(x_j)}{\sum_{j=0}^{j=n} (p_i(x_j))^2}, \qquad i = 0, \ldots, k. \tag{3.8}$$

Preuve

Il faut montrer que

$$\|f - P_k^*\| \le \|f - P\| \qquad \forall P \in \mathcal{P}_k[X] \tag{3.9}$$

Posons

$$P^*(x) = \sum_{i=0}^{i=k} a_i^* p_i(x). \tag{3.10}$$

On cherche les valeurs $a_0^*, a_1^*, \ldots, a_k^*$ qui rendent 3.6 minimum. Pour cela, en utilisant la propriété d'orthogonalité suivante :

$$\begin{aligned} \langle f - P_k^*, P \rangle &= 0, \qquad \forall P \in \mathcal{P}_k[X] \\ \left\langle f - \sum_{j=0}^{j=k} a_j^* p_j, P \right\rangle &= 0, \qquad \forall P \in \mathcal{P}_k[X] \end{aligned} \tag{3.11}$$

l'égalité est vraie pour les polynômes de la base $p_i(x)$, $i = 0, \ldots, k$, et par suite on construit un système linéaire de dimension $k+1$ dont les $k+1$ inconnues sont les a_i^*, $i = 0, \ldots, k$

$$\left\langle f - \sum_{j=0}^{j=k} a_j^* p_j, p_i \right\rangle = 0, \quad i = 0, \ldots, k, \tag{3.12}$$

ou
$$\left\langle \sum_{j=0}^{j=k} a_j^* p_k, p_i \right\rangle = \langle f, p_i \rangle \quad i = 0, \ldots, k. \tag{3.13}$$
Le système matriciel associé est $Ay = b$ avec
$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \langle p_i, p_j \rangle = \begin{cases} \|p_i\|^2 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \qquad i, j = 0, 1, \ldots, k \\ b_j &= \langle f, p_j \rangle \quad j = 0, 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{3.14}$$
qui a comme solution
$$a_i^* = \frac{\langle f, p_i \rangle}{\|p_i\|^2}, \quad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{3.15}$$

Exemple 3.0.5

■ Trouver la meilleure approximation de la fonction tabulée suivante f au sens des moindres carrées aux points $x_0 = 0, x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

Table 3.5 – la fonction tabulée

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	2

► Il est clair que l'ensemble $A = \{p_0(x), p_1(x)\}$ où $p_0(x) = 1$ et $p_1(x) = x - 1$ est orthogonal. Donc
$$P_2^*(x) = a_0^* p_0(x) + a_1^* p_1(x).$$
Les coefficients a_0^*, a_1^* sont déterminés à l'aide de la formule (3.15), on obtient alors
$$P_2^*(x) = 1 + \frac{1}{2} p_1(x) = \frac{1}{2}(x + 1).$$

Meilleure approximation au sens (M.C) dans la base canonique

Théorème 3.0.3

Soit
$$P_k^*(x) = \sum_{i=0}^{i=k} \alpha_i x^i,$$
la meilleure approximation au sens des (M.C) de degré k de la fonction f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Alors, le vecteur des coefficients $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq k}$ est la solution unique du système linéaire $A\alpha = b$ où
$$A_{i,j} = \langle x^i, x^j \rangle \qquad i, j = 0, 1, \ldots, k. \tag{3.16}$$

et

$$b_j = \langle f, x^j \rangle \qquad j = 0, 1, \ldots, k. \tag{3.17}$$

Preuve Ce résultat se déduit immédiatement de l'égalité d'orthogonalité suivante :

$$\begin{aligned} \langle f(x) - \sum_{j=0}^{j=k} \alpha_j x^j, x^i \rangle &= 0, \quad i = 0, \ldots, k \\ &\Updownarrow \\ \sum_{j=0}^{j=k} \alpha_j \langle x^j, x^i \rangle &= \langle f(x), x^i \rangle \quad i = 0, \ldots, k \\ &\Updownarrow \\ \sum_{j=0}^{j=k} A_{i,j} \alpha_j &= b_i \quad i = 0, \ldots, k. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Exemple 3.0.6

■ Trouver la meilleure approximation de la fonction tabulée suivante f au sens des moindres carrées aux points x_0, x_1, x_2, x_4, et x_5 dans la base canonique $x^i, i = 0, 1, 2$.

▶

$$P_2^*(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

Alors, le vecteur des coefficients $(\alpha_i)_{0 \le i \le 2}$ est la solution unique du système linéaire

$$A\alpha = b$$

Table 3.6 – Calcul des coefficients a_i^* de l'exemple 3.0.5

x_i	0	1	2	$\langle , \rangle$
$p_0(x_i)$	1	1	1	$\langle p_0, p_0 \rangle = \|p_0\|^2 = 3$
$f(x_i)$	1	0	2	$\|f(x)\|^2 = 5$
$p_0(x_i) f(x_i)$	1	0	2	$\langle f, p_0 \rangle = 3$
$a_0^* = \frac{3}{3} = 1$				
$p_1(x_i)$	-1	0	1	$\langle p_1, p_1 \rangle = \|p_1\|^2 = 2$
$f(x_i)$	1	0	2	$\|f(x)\|^2 = 5$
$p_1(x_i) f(x_i)$	-1	0	2	$\langle f, p_1 \rangle = 1$
$a_1^* = \frac{1}{2}$				

Table 3.7 – la fonction tabulée

x_i	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	1	-1	-1	1	5

. avec

$$A_{i,j} = \sum_{l=0}^{l=2} x_l^{i+j} = A_{j,i} \qquad i = 0,1,2,\ j = 0,1,2. \tag{3.19}$$

Table 3.8 – Les éléments du système

x_i	-1	0	1	2	3	$\langle , \rangle$
x^{0+0}	1	1	1	1	1	5
x^{0+1}	-1	0	1	2	3	5
x^{0+2}	1	0	1	4	9	15
x^{1+1}	1	0	1	4	9	15
x^{1+2}	-1	0	1	8	27	35
x^{2+2}	1	0	1	16	81	99
$x^0 f(x_i)$	1	-1	-1	1	5	$\langle x^0, f(x)\rangle = 5$
$x^1 f(x_i)$	-1	0	-1	2	15	$\langle x^1, f(x)\rangle = 17$
$x^2 f(x_i)$	1	0	-1	4	45	$\langle x^2, f(x)\rangle = 49$

on obtient le système d'équation suivant

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 15 \\ 5 & 15 & 35 \\ 15 & 35 & 99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 49 \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

dont la solution est

$$\alpha = \begin{pmatrix} -32/55 \\ -8/35 \\ 5/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.91428575 \\ -0.2285714 \\ 0.7142857 \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Série d'exercices et applications

Exercice 3.0.1 (Calcul du produit scalaire)
Soit les fonctions tabulées suivantes :

Table 3.9 – Les fonctions tabulées f et g

x_i	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	1	-1	-1	1	5
$g(x_i)$	-1	0	-1	2	15

► Calculer le produit scalaire $< f, g >$, et les normes de f et g ?
► Les fonctions f et g, sont elles orthogonales ?
► Calculer les produits scalaires $< f, x^i >$, $i = 0, i = 1, i = 2$?

Exercice 3.0.2
Soit la suite des points suivants :

x_i	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

► Construire une base orthogonale $A = \{p_0,\ \ p_1\ \ p_2\}$ de l'espace $\mathcal{P}_2[X]$ en utilisant l'algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt associé au produit scalaire défini par les points x_i ?
► Trouver le polynôme $p^*(x) \in \mathcal{P}_2[X]$ solution du problème de minimisation ci-dessous exprimé dans la base A :

$$\mathcal{P}_{min1}\begin{cases} \text{Trouver } \ P^* \in \mathcal{P}_2[X] \\ \\ \min_{P\in\mathcal{P}_2[X]} \sum\limits_{i=0}^{i=3} (|x_i| - P(x_i))^2 \end{cases} \tag{3.22}$$

Exercice 3.0.3 (Meilleure approximation dans la base canonique)
► Résoudre les problèmes d'optimisation suivants :

$$\mathcal{P}_1 \qquad \begin{cases} \text{Trouver } a^*, b^*, c^* \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{i=3} \Big[\cos(\pi i) - (a^* i^2 + b^* i + c^*)\Big]^2 = \min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \sum_{i=0}^{i=3} \Big[\cos(\pi i) - (a i^2 + b i + c)\Big]^2 \end{cases}$$

$$\mathcal{P}_2 \qquad \begin{cases} \text{Trouver } a^*, b^*, c^* \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \displaystyle\sum_{i=-1}^{i=2} \Big[\sin(\pi i) - (a^* i^2 + b^* i + c^*)\Big]^2 = \min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \sum_{i=-1}^{i=2} \Big[\sin(\pi i) - (a i^2 + b i + c)\Big]^2 \end{cases}$$

Chapitre 4

Intégration Numérique

4.0.1 Motivations

Soient f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a,b]$ ($f \in C[a,b]$) et F sa primitive.

On définit la quantité $I(f)$ par

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx. \tag{4.1}$$

dont la valeur exacte est

$$I(f) = F(b) - F(a). \tag{4.2}$$

Exemple 4.0.1

☛ Dans plusieurs cas, on ne peut pas déterminer la primitive F pour différentes raisons, comme dans l'exemple suivant :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

On note que la primitive de f est inconnue.

☛ Fonctions tabulées : f connues seulement en un nombre fini de points.

Question : Quelle est la procédure à adopter pour calculer une valeur approximative de

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx. \tag{4.4}$$

La réponse est de construire des méthodes numériques dites indirectes dont le but principal est d'estimer la valeur de l'intégrale définie d'une fonction f.

4.0.2 Méthodes Générales :

Ces méthodes suivent en général les étapes suivantes, en premier lieu, on fait la décomposition de l'intervalle en morceaux, c'est-à-dire en sous-intervalles contigus, puis l'intégration approchée de la fonction sur chaque morceau, et en fin, la sommation de tous les résultats obtenus. En effet, pour des points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ quelconques de l'intervalle I ; $I(f)$ sera approchée par une suite des intégrales $I_n(f)$ telles que

$$I_n(f) = \int_a^b P_n(x)dx. \tag{4.5}$$

où $P_n(x)$ est le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points x_i.

Formule des Trapèzes

D'ordre $n = 1$

En interpolant f par un polynôme de degré 1, les deux points d'interpolation suffisent à tracer un segment dont l'intégrale correspond à l'aire d'un trapèze, justifiant le nom **méthode des trapèzes** qui est d'ordre 1.

$$I(f) = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{4.6}$$

Si f est de classe $C^2(]a,b[)$, l'erreur est donné par :

$$E(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f^{(2)}(\nu),\ \nu\ \in]a,b[\tag{4.7}$$

Conformément aux expressions de l'erreur, la méthode des trapèzes est souvent moins performante que celle du point milieu.

D'ordre n

$$I_n(f) = \frac{h}{2}\left\{f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{i=n-1} f(x_i)\right\}, \tag{4.8}$$

où

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a, \quad x_n = b. \tag{4.9}$$

Formule de Simpson $n = 2$

En interpolant f par un polynôme de degré 2 (3 degré de liberté), 3 points sont nécessaires pour le caractériser, les valeurs aux extrémités a et b et celle choisie en leur milieu $x_{1/2} = (b+a)/2$, la méthode de Simpson est basée sur un polynôme de degré 2 (intégrale d'une parabole), tout en restant exact pour des polynômes de degré 3, elle est donc d'ordre 3.

$$I(f) = \frac{(b-a)}{6}[f(a) + 4f(x_{1/2}) + f(b)]. \tag{4.10}$$

Si f est de classe $C^2(]a,b[)$, l'erreur est donné par :

$$E(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\nu),\ \nu\ \in\ ]a,b[\tag{4.11}$$

Remarque : Comme la méthode du point milieu caractérise un polynôme de degré 0, et qui reste exacte pour tout polynôme d'ordre 1, la méthode de Simpson caractérise un polynôme de degré 2 et reste exacte pour tout polynôme de degré 3.

Formule de Simpson généralisée $n = 2k$

On divise l'intervalle $[a,b]$ en $2n$ intervalles égaux.

$$I_n(f) = \frac{h}{3}\left\{f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{i=n-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{i=n-1} f(x_{2i-1})\right\}. \tag{4.12}$$

4.0.3 Erreur d'approximation

Théorème 4.0.1
Soit f une fonction deux fois dérivable,
① L'erreur maximale pouvant être commise sur la valeur $I(f)$ approchée par la méthode des trapèzes est donnée par la formule suivante :

$$\varepsilon_{Trap} = \mid I(f) - I_n(f) \mid = \frac{(b-a)^3 f''(\xi)}{12n^2}.\ \ avec\ \ \xi \in [a,b]. \tag{4.13}$$

Si on suppose de plus que f est une fonction de classe C^4 dans $[a,b]$, alors
② L'erreur maximale pouvant être commise sur la valeur $I(f)$ approchée par la méthode de Simpson est donnée par la formule suivante :

$$\varepsilon_{Simp} = \mid I(f) - I_n(f) \mid = \frac{(b-a)^5}{2^3 \times 4! \times 15n^4} f^{(4)}(\xi_1).\ \ avec\ \ \xi_1 \in [a,b]. \tag{4.14}$$

Ces méthodes ont été programmées en **Scilab 5.2** avec des tests de validation pour des fonctions dont les intégrales exactes sont connues. On clôturera cette partie par deux représentations graphiques qui montrent l'ordre de la convergence de ces méthodes en fonction du pas de discrétisation de l'intervalle $[a,b]$, $h = \dfrac{b-a}{n}$.

```
function [xx] = Trapezes(x0,y0,xn,Mz,y1,pci)
h=(xn-x0)/Mz;
s=0;
  for (i=1:Mz),
    x(i)=x0+i*h;
    y(i)=y1(i)*pci(i);
    s=s+2*y(i);
  end,
xx=(h/2)*(y0+s-y(Mz));

endfunction
                    deff('[y]=f(x)','y=exp(x)');
        for(i=1:5), Mz=i*20;
          h=1/Mz; x=h:h:1;
          y1=f(x);
          I(f)=integrate('f(x)^2','x',0,1);
          g(i)=Trapezes(0,1,1,Mz,y1',y1');
        end;
integrate('f(x)^2','x',0,1) // La valeur exacte de la fonction exp(2x
        for(i=1:5),
er(i)= (g(i)-integrate('f(x)^2','x',0,1))/I(f); // erreur relative
        end;
//////////    presentation graphique /////////////////////////////////


        Mx=[20,40,60,80,100];
                plot2d(Mx^(-1),6*er,logflag="ll",style=-4);
                plot2d(Mx^(-1),6*er,logflag="ll",style=2);
                plot2d(Mx^(-1),1*Mx^(-2),logflag="ll",style=-5);
                plot2d(Mx^(-1),1*Mx^(-2),logflag="ll",style=1);
xlabel('$ pas \ de \ discrétisation \ h \ = \  \frac{b-a}{n}$');
ylabel('$ \|I(f) -IN^{Tr}(f)\|/\|I(f)\|$');
xtitle('$\textcolor{black}{ \ The  \ Trapezes \ formula \ of \
            Numerical \ integration \  } $');
legends(['$Log(h^{2})$';'$ Numerical \ error \ slope=2 $'],[2 1],opt=

/////////////////////////////////////
```

```
function [xx] = Simpson(x0,y0,xn,Mz,y1,pci)
    h=(xn-x0)/Mz;
    x=x0:h:xn;
        for (i=1:Mz),
             y(i)=y1(i)*pci(i);
        end;
            s1=0;s2=0;
        for (i=1:Mz/2),
            s1=s1+4*y(2*i-1);
            s2=s2+2*y(2*i);
        end,
    xx=(h/3)*(y0+s1+s2-y(Mz));

endfunction

            deff('[y]=f(x)','y=exp(x)');
            for(i=1:6),
              Mz=i*20; h=1/Mz;
              x=h:h:1;
              y1=f(x); g(i)=Simpson(0,1,1,Mz,y1',y1');
            end;
           I(f)=integrate('f(x)^2','x',0,1)
           for(i=1:6),
           er(i)= (g(i)-integrate('f(x)^2','x',0,1))/I(f);
           end;

//////////    presentation graphique ////////////////////////////////////////
                      Mx=[20,40,60,80,100,120];
            scf(2);
           plot2d(Mx^(-1),1*er,logflag="ll",style=-4);
           plot2d(Mx^(-1),1*er,logflag="ll",style=2);
           plot2d(Mx^(-1),1*Mx^(-4),logflag="ll",style=-5);
           plot2d(Mx^(-1),1*Mx^(-4),logflag="ll",style=1);
 xlabel('$ pas \ de \ discrétisation \ h \ = \  \frac{b-a}{n}$');
 ylabel('$ \|I(f) -IN^{Sim}(f)\|/\|I(f)\|$');
 xtitle('$\textcolor{black}{ \ The  \ Simpson \ formula \ of \ Numerical 
   integration \  } $');
 legends(['$Log(h^{4})$';'$ Numerical \ error \ slope=4 $'],[2 1],opt=5)
```

Série d'exercices et applications sur l'intégration numérique

Exercice 4.0.1

Approximer l'intégrale suivante :

$$I(f) = \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}.$$

par la méthode de :

① des trapèzes

② de Simpson.

③ des trapèzes, formule générale avec $n = 3$.

④ Simpson, formule générale avec $n = 6$.

⑤ Estimer l'erreur commise pour chaque cas.

Exercice 4.0.2

Déterminer le nombre de points n qu'il faut utiliser dans la méthode des trapèzes pour approximer l'intégrale

$$I(f) = \int_0^1 \exp(-x^2)dx.$$

avec une erreur $\epsilon = 10^{-2}$

Exercice 4.0.3

Même question que celle de l'exercice précédent, pour l'intégrale

$$I(f) = \int_1^2 x\log(x)dx.$$

TABLE 4.1 – Les valeurs de $f(x) = x\log(x)$ aux pts x_i

x_i	1	3/2	2	4/3	5/3
$f(x_i)$	0	0.6081977	1.3862944	0.3835761	0.8513760

Exercice 4.0.4 (Application en calcul de probabilité)

On souhaite calculer une valeur approximative de l'intégrale de la fonction de Gauss définie ci-dessous :

Définition 4.0.1
On appelle fonction de Laplace-Gauss la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Sa courbe représentative est donnée sur la figure 4.1. On l'appelle courbe de Gauss ou courbe en cloche.

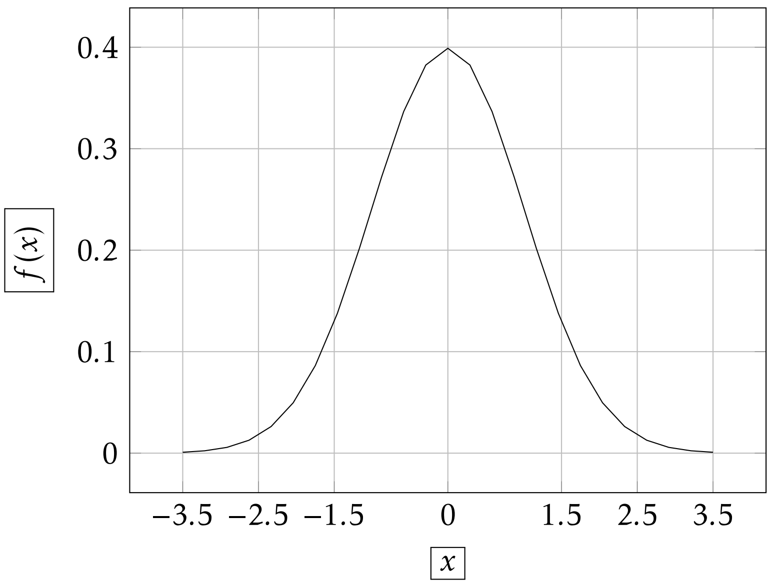

Figure 4.1 – Courbe de la fonction de Laplace-Gauss

✲ Calculer une valeur approximative $I_n(f)$ de $I(f)$ par la méthode de Simpson avec $n = 4$. (les bornes sont $a = -3.5$ et $b = 3.5$).

En théorie des probabilités et en statistique, la fonction de Laplace-Gauss est la densité de probabilité de la loi normale qui est l'une des lois de probabilité les plus utilisées pour modéliser des problèmes issus de plusieurs expériences aléatoires. Elle est également appelée loi gaussienne, loi de Gauss ou loi de Laplace-Gauss des noms de Laplace (1749-1827) et Gauss (1777-1855), deux mathématiciens, astronomes et physiciens qui l'ont étudié.

La courbe de cette densité de probabilité est appelée courbe de Gauss. C'est la représentation de la loi normale de moyenne nulle et d'écart type unitaire qui est appelée loi normale centrée réduite.

Programme de la méthode des Trapèzes en Scilab

☛ Les résultats numériques sont enregistrés dans le tableau ci-dessous ainsi que les figures 4.2 et 4.3 montrent l'ordre de la convergence de la méthode de Simpson et celle des trapèzes respectivement appliquées sur la fonction test $f(x) = exp(x)^2$, ces courbes sont tracées dans une échelle logarithmique.

level	er	er1	h	h2	h4
1	$6 \cdot 10^{-7}$	$8.33 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$6.25 \cdot 10^{-6}$
2	$3.47 \cdot 10^{-8}$	$2.08 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$6.25 \cdot 10^{-4}$	$3.91 \cdot 10^{-7}$
3	$6.86 \cdot 10^{-9}$	$9.26 \cdot 10^{-5}$	$1.67 \cdot 10^{-2}$	$2.78 \cdot 10^{-4}$	$7.72 \cdot 10^{-8}$
4	$2.17 \cdot 10^{-9}$	$5.21 \cdot 10^{-5}$	$1.25 \cdot 10^{-2}$	$1.56 \cdot 10^{-4}$	$2.44 \cdot 10^{-8}$
5	$8.89 \cdot 10^{-10}$	$3.33 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-8}$

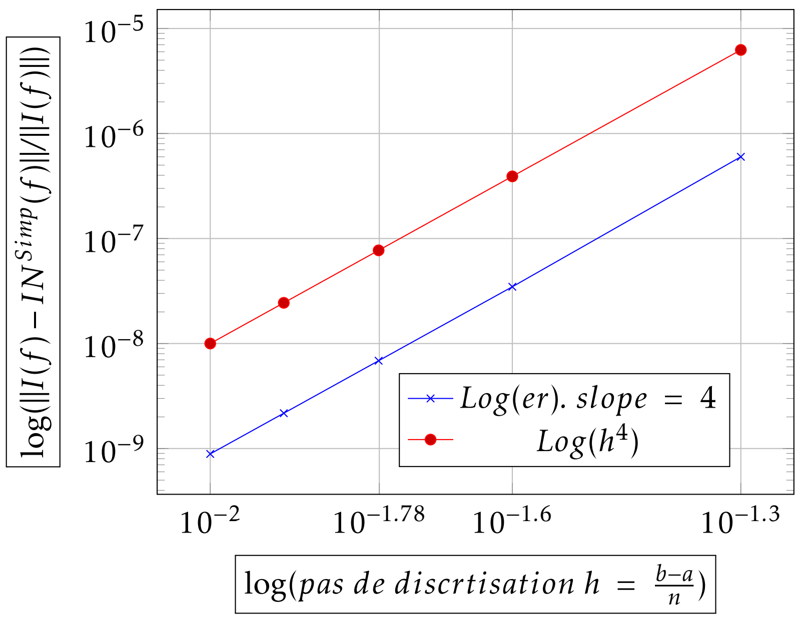

FIGURE 4.2 – *Ordre de convergence de la formule de Simpson*

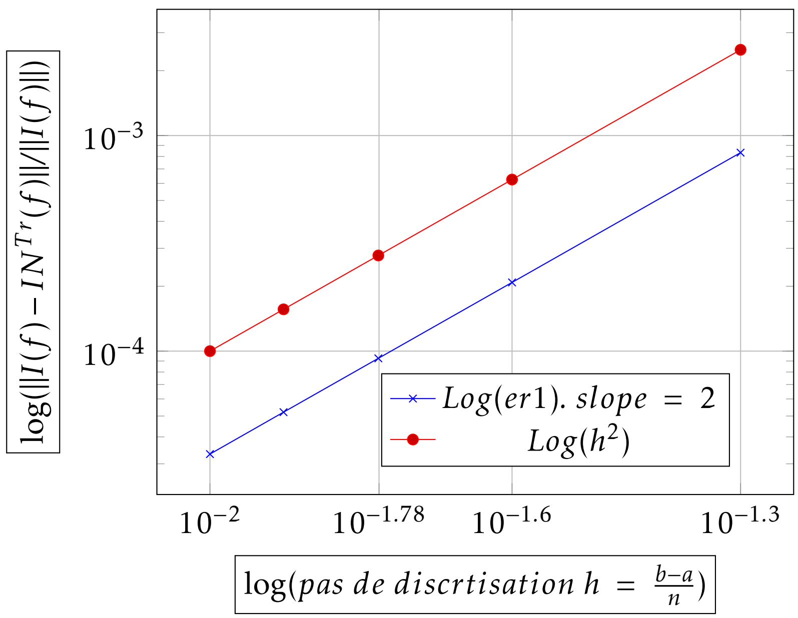

FIGURE 4.3 – *Ordre de convergence de la formule des trapzes*

Bibliographie

[1] P.G. Ciarlet, *Introduction et analyse numérique matricielle et à l'optimisation* , Dunod, Paris, 1998

[2] M. Crouzeix, AL Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles*, collec. Math. Appli. pour la maîtrise Masson, 1984.

[3] J.P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses universitaires de Grenoble 3^{me} édition 2006.

[4] P. Lascaux, R. Théodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, Tomes 1 et 2 Masson 1986.

[5] G. Legendre, *Méthodes numériques : Introduction à l'analyse numérique et au calcul scientifique.* Polycopié, 2018