2 - Analyse combinatoire

I. Introduction

Les différents modèles mathématiques construits pour étudier les phénomènes où intervient le hasard sont basés sur la notion de probabilité. Celle-ci exige des dénombrements d'ensembles finis. C'est l'objet d'étude de l'analyse combinatoire.

Toute suite d'éléments choisis parmi les éléments d'un ensemble fini peut être ordonnée ou non, selon que l'on tient compte ou non de la position occupée par les éléments. D'autre part, la suite peut être avec ou sans répétitions, selon qu'un même élément puisse être utilisé plusieurs ou une seule fois.

Exemples

- Si on jette un dé, combien de résultats distincts sont-ils possibles ?
- Combien y a-t-il de « mains » différentes au poker ?
- Combien peut-on former d'anagrammes du mot « Analyse » ?
- De combien de façons peut-on choisir 4 personnes parmi 17 ?
- Combien existe-t-il de nombres compris entre 100 et 100'000 commençant par un chiffre impair et contenant des chiffres différents ?

2- Permutations sans répétitions et notation factorielle

Exercice :

a) De combien de manières différentes peut-on placer 5 personnes l'une à côté de l'autre ?

b) Combien de nombres peut-on écrire en utilisant exactement une fois chacun des chiffres de 1 à 6 ?

a) Il y a 5 choix pour la 1ère place, 4 choix pour la 2ème place, puis 3 choix, puis 2 puis 1 choix. Donc il y a $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ manières différentes de placer ces 5 personnes.

b) Il y a 6 choix pour le premier chiffre, puis 5, puis 4, etc. jusqu'à 1 choix pour la dernière place. Donc il y a $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ nombres que l'on peut écrire de la manière demandée.

Définition et formule :

On dispose de n objets distincts. Une permutation de n objets est une manière de placer ces n objets distincts sur une rangée. Le nombre de permutations de n objets est noté P_n et vaut :

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Explication :

Il y a n choix pour placer le 1er objet, $n-1$ pour le 2ème, .., 2 pour l'avant dernier et 1 pour le dernier

Remarque : Deux permutations distinctes ne diffèrent que par l'ordre des objets les composant.

3- Notation factorielle

Nous venons de voir que le produit n . (n-1) . (n-2) … 3 .2 . 1 · – · – · · · · intervient naturellement dans le dénombrement du nombre de permutation de n objets. Ce produit intervient encore dans de nombreux dénombrements, donc la notation n! a été introduite pour le décrire. Le nombre n! se lit « n factorielle ». Donc

n! = n . (n-1) . (n-2) … 3 .2 . 1

1! = 1 . 0! pour que l'égalité soit correcte, il faut utiliser la convention 0! = 1.

4- Arrangements sans répétition

Définition et formule :

On dispose de n objets distincts. Un arrangement sans répétitions de n objets pris k à la fois, est une manière de choisir k (k ≤ n) objets parmi n. L'ordre compte.

Le nombre d'arrangements sans répétitions de n objets pris k à la fois, est noté $\boldsymbol{A_n^k}$

, et vaut :

$$A_n^k = \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{(n-k)!}} = \boldsymbol{n\,.(n-1).(n-2)\ldots(n-k+1)}$$

Explication : Il y a n choix pour le 1er objet, n–1 pour le 2ème, n–2 pour le 3ème, …, n–k+1 pour le kème.

5- Arrangements avec répétitions

Définition et formule ;

On dispose de n objets distincts. Un arrangement avec répétitions de n objets pris k à la fois, est une manière de choisir k objets parmi ces n objets, le même objet pouvant être pris plusieurs fois. L'ordre compte.

Le nombre d'arrangements avec répétitions de n objets pris k à la fois, vaut : n^k

Explication : Il y a n choix pour le 1er objet, n pour le 2ème, n pour le 3ème, …, n pour le kème.

Exercice :

a) Combien de séries différentes peut-on obtenir en jouant à « pile ou face » 7 fois ?

b) Combien de séquences peut-on lire sur un compteur de voitures ? Ce compteur est composé de 5 cylindres sur chacun desquels sont gravés les chiffres de 0 à 9.

c) Combien de sous-ensembles différents peut-on former à partir de l'ensemble { A ; B ; C ; D } ?
a) On peut obtenir $2^7 = 128$ séries différentes en jouant 7 fois à « pile ou face ».

b) On peut lire $10^5 = 100\ 000$ séquences différentes sur ce compteur.

c) Pour chaque lettre, il y a deux possibilités. Soit elle est prise, soit elle n'est pas prise. Cela permet donc de former $2^4 = 16$ sous ensembles. Voici la liste de ces 16 sous-ensembles :

∅ ; {A} ; {B } ; {C } ; {D } ; {A , B} ; {A , C} ; {A , D} ; {B , C} ; {B , D} ; {C , D} ; {A , B, C} ; {A , B, D} ; {B , C, D} ; {A , C, D} ; {A , B, C, D}

6- Permutations avec répétitions

Définition et formule :

On dispose de n objets. Parmi ces n objets il y a p sortes différentes. On suppose qu'il y a : n1 objets de sorte 1, n2 objets de sorte 2, … , np objets de sorte p, où n1 + n2 + … + np = n.

Une permutation avec répétition de ces n objets est une permutation de ces n objets, dans laquelle on ne distingue pas les objets d'une même sorte. Le nombre de permutations avec répétitions de n = n1 + n2 + … + np objets se vaut :

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2! \ldots n_p!}$$

Explication :

Il y a n ! permutations possibles de ces n objets, parmi lesquelles il y a n_1 ! permutations des objets de la première sorte, qu'on ne distingue pas, il y a n_2 ! permutations des objets de la deuxième sorte, qu'on ne distingue pas, etc. Dans les n ! permutations des objets, on en compte $n_1!\ n_2! \ldots n_p!$ fois trop.

Exercice :

a) De combien de façons peut-on aligner 2 livres rouges, 5 livres verts et 1 livre blanc sur une étagère ? (Seule la couleur différencie les livres !)

b) De combien de manière différentes peut-on placer l'une à côté de l'autre, 5 boules rouges, 3 vertes et 2 bleues ?

a) On peut aligner ces 8 livres de $\frac{8!}{2!.\ 5!.\ 1!} = 168$ façons différentes.

b) On peut placer ces 10 boules de $\frac{10!}{5!.\ 3!.\ 2!} = 2520$ manières différentes l'une à côté de l'autre

7- Combinaisons sans répétition

Définition et formule :

On dispose de n objets distincts. Une combinaison sans répétitions de n objets pris k à la fois, est un choix de k (k ≤ n) objets parmi n. L'ordre ne compte pas.

Le nombre de combinaisons sans répétitions de n objets pris k à la fois, est noté n C_n^k, et vaut :

$$C_n^k = \frac{n\ !}{k\ !\ .\ (n-k)\ !}$$

Exercice :

a) Combien de glaces distinctes avec 4 parfums différents peut-on faire avec 9 parfums ?

b) Combien de mains de 5 cartes peut-on former à partir d'un jeu de 9 cartes ?

c) Pourquoi obtient-on le même résultat en a) et en b) ?

a) On peut former $C_9^4 = 126$ glaces distinctes.

b) On peut former $C_9^5 = 126$ mains de 5 cartes à partir d'un jeu de 9 cartes.

c) Remarquez que $C_n^{n-k} = \frac{n\ !}{(n-k)\ !\ .\ k\ !} = \frac{n\ !}{k\ !\ .\ (n-k)\ !} = C_n^k$ donc $C_9^4 = C_9^5$