I. Fonctions de plusieurs variables

1.1 Fonctions de deux variables

1.1.1 Généralités. Déjà fait!

1.1.2 Limites et continuité. Déjà fait!

1.1.3 Dérivées partielles.

1.1.3.1 Dérivées partielles d'ordre 1.

Définition 1 *Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in U$.*

Si la fonction partielle $f_x : x \longmapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0, on dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x en (x_0, y_0) et on note

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

De même, Si la fonction partielle $f_y : y \longmapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0, on dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y en (x_0, y_0) et on note

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Définition 2 *Si pour tout $(x, y) \in U$, f admet les deux dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x et y, on dit que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur U notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.*

Définition 3 *Une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ en (x_0, y_0) (resp. sur U) si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues en (x_0, y_0) (resp. sur U).*

Exemple 4 *1. Soit* $f(x,y) = x^2y + y^2 + 3x$*.* f *est un polynôme de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$*, en effet :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + 3 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2y$$

il est clair que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *sont des polyômes continues sur* $\mathbb{R}^2$*.*

2. Soit $f(x,y) = e^{x+y} + \ln(x-y)$*.* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur son domaine de définition* $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}$*, en effet :*

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}_f : \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x+y} + \frac{1}{x-y} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x+y} - \frac{1}{x-y}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *sont continues sur* $\mathcal{D}_f$*.*

3. Soit $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$*.* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur son domaine de définition* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$*, en effet :*

$$\forall (x,y) \neq (0,0) : \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *sont continues sur* $\mathcal{D}_f$*.*

Remarque 5 *L'existence de* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ *n'assure pas la continuité de* f *en* (x_0,y_0)*.*

Exemple 6 *Pour* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$*, nous avons montrer (voir continuité) que* f *est discontinue en* $(0,0)$*, par contre* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ *existent, en effet ;*

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{\frac{x\times 0}{x^2+0} - 0}{x} = 0 \text{ et } \lim_{\substack{y\to 0 \\ y\neq 0}} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{\substack{y\to 0 \\ y\neq 0}} \frac{\frac{0\times y}{0+y^2} - 0}{y} = 0$$

1.1.3.2 Développement limité d'ordre 1.

Théorèm 7 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de U. Il existe un voisinage V de M_0 tel que pour tout point $M = (x, y)$ de V :*

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + d(M, M_0)\,\varepsilon(x,y)$$

avec

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon(x,y) = 0 \text{ et } d(M, M_0) = \|(x,y) - (x_0,y_0)\|$$

Cette formule définit le développement limité d'ordre 1 de f en (x_0, y_0).

Autrement dit, toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en (x_0, y_0) admet une approximation affine en ce point, c.à.d. au voisinage (x_0, y_0)

$$f(x,y) \approx f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Remarque 8 *1. On prend usuellement : $d(M, M_0) = \|(x,y) - (x_0,y_0)\|_2 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$*

2. Si $h = x - x_0$ et $k = y - y_0$, une autre écriture du développement limité est donnée par

$$f(h + x_0, k + y_0) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \sqrt{h^2 + k^2}\,\varepsilon_1(h,k)$$

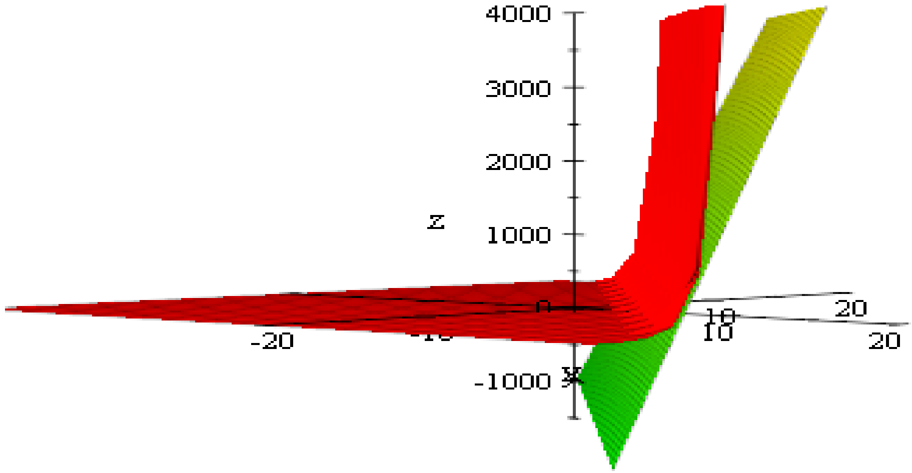
avec

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_1(h,k) = 0 \text{ d'où } \varepsilon_1(h,k) = \varepsilon(h + x_0, k + y_0)$$

Exemple 9 *Soit $f(x,y) = e^{x+y}$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et on a $f(3,3) = e^6$, $\frac{\partial f}{\partial x}(3,3) = e^6$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(3,3) = e^6$.*

D'où le développement limité d'ordre 1 de f en $(3,3)$ est donné par

$$\begin{aligned} e^{x+y} &= f(3,3) + (x-3)\frac{\partial f}{\partial x}(3,3) + (y-3)\frac{\partial f}{\partial y}(3,3) + \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}\,\varepsilon(x-3, y-3) \\ &= e^6(-5 + x + y) + \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}\,\varepsilon(x-3, y-3) \text{ avec } \lim_{(x,y)\to(3,3)} \varepsilon(x-3, y-3) = 0 \end{aligned}$$



La surface $z = e^{x+y}$ *(en rouge) et le plan tangent* $z = e^6\,(x + y - 5)$ *(en vert)*

1.1.3.3 Dérivées partielles d'ordre 2.

Définition 10 *Soit* f *une foction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^2$ *et* $(x_0, y_0) \in U$. *Si les deux dérivées partielles d'ordre 1* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *admet eux mêmes des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à* x *et* y *en* (x_0, y_0), *on dit que* f *admet des dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à* x *et* y *en* (x_0, y_0) *notées* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ *et définies respectivement par*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{x - x_0} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{x - x_0} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{y - y_0} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{y - y_0}
\end{aligned}$$

Définition 11 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Si pour tout $(x,y) \in U$ les deux dérivées partielles d'ordre 1 $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ admet eux mêmes des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x et y, on dit que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur U notées $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et on a $\forall (x,y) \in U$:*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)
\end{aligned}
$$

Exemple 12 *Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y) = x^2 y + y^2 + 3x$*

1. *Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f en $(0,0)$. En effet :*

   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + 3$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2y$ *d'où*

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x-0} &= \lim_{x \to 0} \frac{3-3}{x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \\
\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} &= \lim_{x \to 0} \frac{x^2-0}{x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \\
\lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} &= \lim_{y \to 0} \frac{3-3}{y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0 \\
\lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y-0} &= \lim_{y \to 0} \frac{2y-0}{y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2
\end{aligned}
$$

2. *Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$. En effet, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:*

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2x \ \text{et}\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2
$$

Remarque 13 *Les dérivées partielles d'ordre 2 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont appelées dérivées croisées.*

Théorèm 14 (Schwarz) *Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et admettant des dérivées partielles d'ordre 2* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *sur un voisinage de (x_0, y_0).* ***Si*** *ces dérivées partielles sont continues en (x_0, y_0)* ***alors*** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

Exemple 15 *Dans l'exemple précedent,* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ *puisque* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *sont continues en $(0,0)$.*

Définition 16 *Une fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ en un point (x_0, y_0) (resp. sur un ouvert U) si et seulement si f admet des dérivées partielles d'ordre 2 toutes continues en (x_0, y_0) (resp. sur U).*

Corollaire 17 *Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ en un point (x_0, y_0) alors* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

Preuve. Déduite directement de la définition ci-dessus. ■

Remarque 18 *Dans le cas où le théorème de Schwarz s'applique; l'ordre de dérivation par rapport à x puis par rapport y, ou l'inverse, n'a pas d'importance.*

1.1.3.4 Développement limité d'ordre 2.

Théorèm 19 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de U. Il existe un voisinage V de M_0 tel que pour tout point $M = (x, y)$ de V :*

$$\begin{gathered} f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0) \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2 \\ + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\,\varepsilon(x,y) \ \ \text{avec} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon(x,y) = 0 \end{gathered}$$

Cette formule définit le développement limité d'ordre 2 de f en (x_0, y_0).

Remarque 20 *Si* $h = x - x_0$ *et* $k = y - y_0$*, une autre écriture du développement limité est donnée par*

$$f\left(h + x_0, k + y_0\right) = f\left(x_0, y_0\right) + ph + qk + \frac{1}{2}rh^2 + shk + \frac{1}{2}tk^2 + \sqrt{h^2 + k^2}\varepsilon_1\left(h, k\right)$$

$$\text{avec } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_1\left(h, k\right) = 0 \text{ et } \varepsilon_1\left(h, k\right) = \varepsilon\left(h + x_0, k + y_0\right)$$

où $p = \dfrac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)$, $r = \dfrac{\partial^2 f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x^2}$, $s = \dfrac{\partial^2 f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y \partial x}$ *et* $t = \dfrac{\partial^2 f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y^2}$ *appelés notation de Monge.*

Exemple 21 *Soit* $f\left(x, y\right) = \sin\left(x^2 + y^2\right)$*.* f *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *et on a* $f\left(0, 0\right) = 0$ *et*

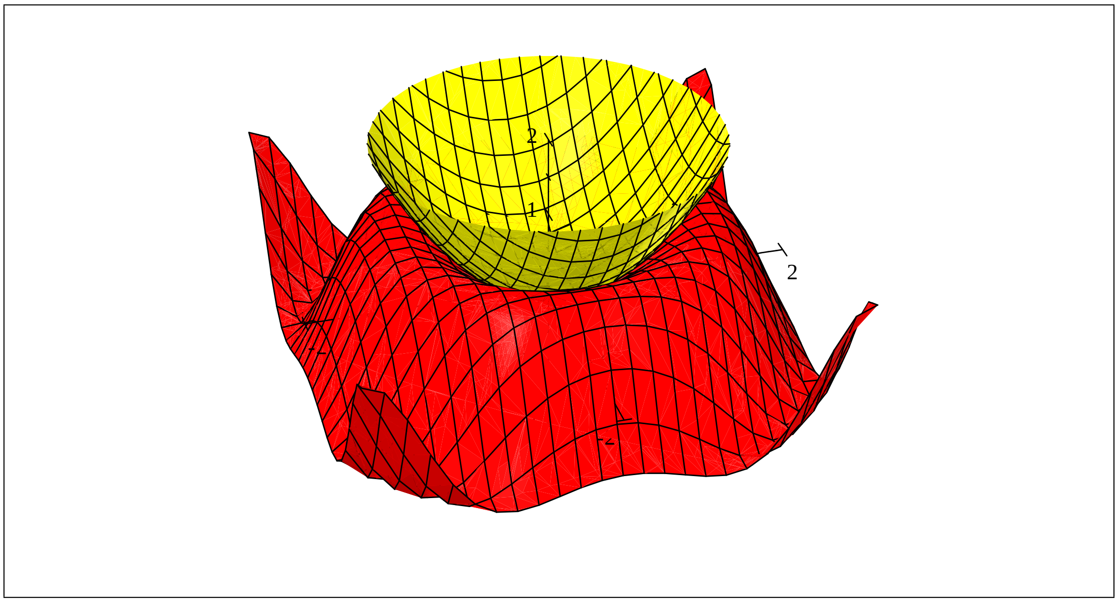
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x} &= 2x\cos\left(x^2 + y^2\right), \ \frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y} = 2y\cos\left(x^2 + y^2\right), \ \frac{\partial^2 f\left(x, y\right)}{\partial x^2} = 2\cos\left(x^2 + y^2\right) - 4x^2\sin\left(x^2 + y^2\right) \\
\frac{\partial^2 f\left(x, y\right)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f\left(x, y\right)}{\partial y \partial x} = -4xy\sin\left(x^2 + y^2\right) \text{ et } \frac{\partial^2 f\left(x, y\right)}{\partial y^2} = 2\cos\left(x^2 + y^2\right) - 4y^2\sin\left(x^2 + y^2\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$p = 0, q = 0, r = 2, s = 0 \text{ et } t = 2$$

Le développement limité d'ordre 2 de f *en* $\left(x_0, y_0\right) = \left(0, 0\right)$ *est donné par (ici* $h = x$ *et* $k = y$*)*

$$\begin{aligned}
\sin\left(x^2 + y^2\right) &= f\left(0, 0\right) + px + qy + \frac{1}{2}rx^2 + sxy + \frac{1}{2}ty^2 + \sqrt{x^2 + y^2}\varepsilon_1\left(x, y\right) \\
&= x^2 + y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}\varepsilon\left(x, y\right) \text{ avec } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon\left(x, y\right) = 0
\end{aligned}$$



La surface $z = \sin\left(x^2 + y^2\right)$ *(en rouge) et la surface tangente* $z = x^2 + y^2$ *(en jaune)*

1.1.4 *Extremums d'une fonction de deux variables.*

Définition 22 *Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On dit que f admet un* ***maximum local*** *(ou relatif) en un point (x_0, y_0) de U s'il existe un voisinage V de (x_0, y_0) tel que pour tout point (x, y) de V , $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$.*

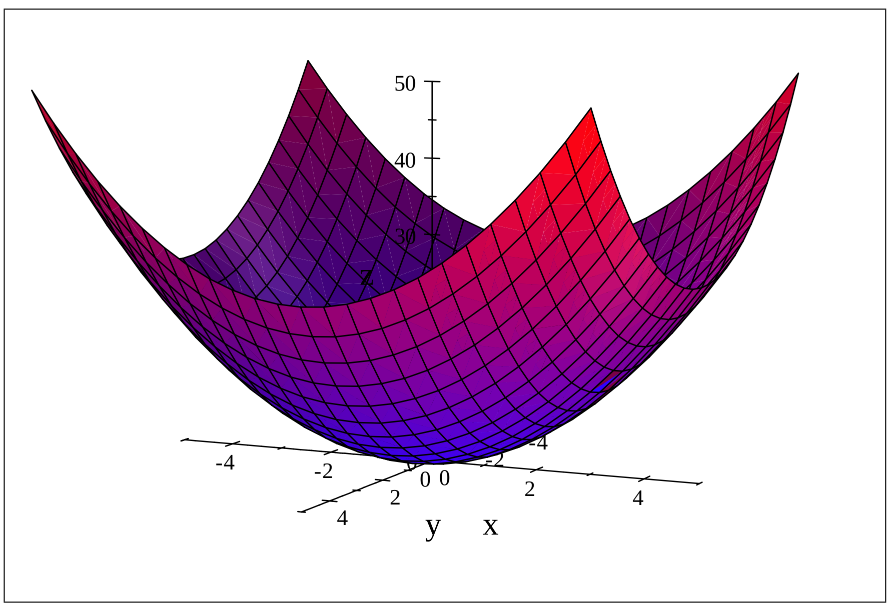
▶ *Si V est l'ouvert U tout entier, le maximum local devient* ***global*** *(ou absolu).*

De même, f admet un ***minimum local*** *au point (x_0, y_0) s'il existe un voisinage V de (x_0, y_0) tel que pour tout point (x, y) de V , $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.*

▶ *Si V est l'ouvert U tout entier, le minimum local devient* ***global*** *(ou absolu).*

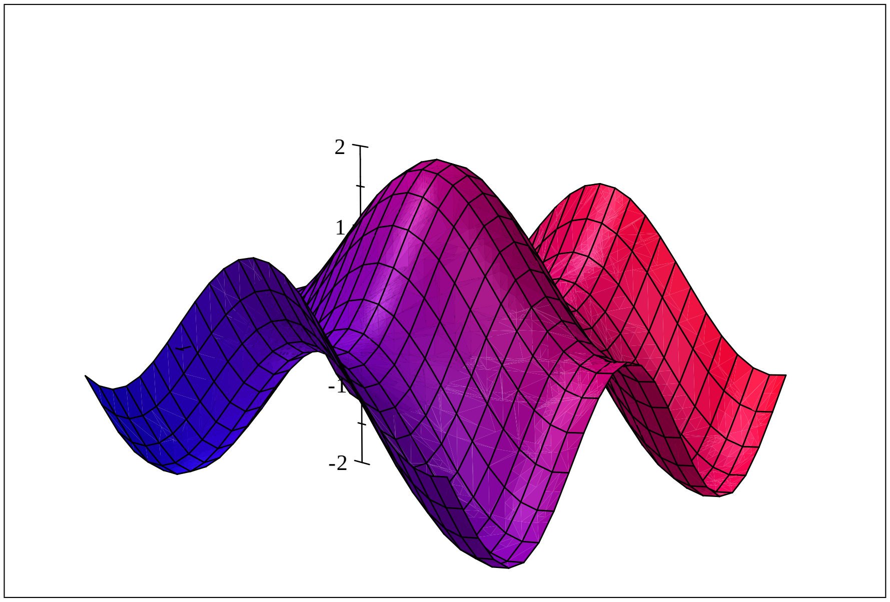
Remarque 23 *Si f admet un maximum et (ou) un minimum, on dit que f admet un extremum.*

Exemple 24 *1. Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \geq 0$ et $f(0, 0) = 0$. Donc f admet un minimum global en $(0, 0)$.*



$f(x, y) = x^2 + y^2$

2. Soit $f(x, y) = \sin x + \cos y$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin x \leq 1$ et $\cos x \leq 1$ d'où $f(x, y) \leq 2 = f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 2$. Donc f admet un maximum global en $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ qui *vaut 2.*



$f(x,y) = \sin x + \cos y$

Définition 25 *Un point* (x_0, y_0) *est appelé un point critique de* f *si* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$.

Théorèm 26 ***Si*** *une fonction* f *de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^2$ *admet au point* (x_0, y_0) *un extremum local* ***alors*** (x_0, y_0) *est un point critique de* f.

Preuve. Si f est admet un minimum (resp. maximum) en (x_0, y_0) et comme f de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de ce point, les fonctions partielles $f_x : x \to f(x, y_0)$ et $f_y : y \to f(x_0, y)$ admettent aussi un minimum (resp. maximum) perspectivement x_0 et y_0, par conséquent leurs dérivées, c'est-à-dire les dérivées partielles d'ordre 1 de f, s'annulent en (x_0, y_0). ■

Notation 27 *Pappelons que* $p = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, $r = \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}$, $s = \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x}$ *et* $t = \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$ *appelés notation de Monge.*

Pour la réciproque du théorème ci-dessus, on a le résultat suivant

Théorèm 28 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point critique de f (c.à.d. $p = q = 0$).*

- Si $s^2 - rt < 0$, f admet en (x_0, y_0) un maximum si $r < 0$, un minimum si $r > 0$.

- Si $s^2 - rt > 0$, il n'y a pas d'extremum en (x_0, y_0)

- Si $s^2 - rt = 0$, on ne peut pas conclure par cette méthode : il faut alors faire une étude du signe de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$.

Preuve. Soit (x_0, y_0) un point critique de f, $(p = q = 0)$, alors le développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de ce point s'écrit :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = r\frac{h^2}{2} + shk + t\frac{k^2}{2} + \sqrt{h^2 + k^2}\varepsilon(h, k) \text{ avec } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$$

en utilisant les notations de Monge.

Cette différence sera donc du signe de $r\frac{h^2}{2} + shk + t\frac{k^2}{2}$, pour h et k assez petits.

Posons $Q(h, k) = r\frac{h^2}{2} + shk + t\frac{k^2}{2} = \frac{k^2}{2}\left(r\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 2s\frac{h}{k} + t\right)$

Le signe de $Q(h, k)$ est celui du trinôme $rX^2 + 2sX + t$ avec $X = \frac{h}{k}$. Son discriminant réduit est $\Delta = s^2 - rt$.

- Si Δ est strictement négatif, le trinôme n'a pas de racine et son signe est celui du signe de r sur $\mathbb{R}$.

On peut en déduire que le signe de la différence $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ est constant dans un voisinage de (x_0, y_0).

- Si Δ est strictement positif, le trinôme change de signe sur $\mathbb{R}$, donc l'expression $Q(h, k)$ change de signe au voisinage de (x_0, y_0), donc la dfférence $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ change de signe dans un voisinage de (x_0, y_0). ■

Conclusion 29 *Pour chercher les extremums éventuels d'une fonction f de deux variables, sur un ouvert U :*

1. Chercher les points critiques de f, ce qui revient à résoudre le système de deux équations à deux inconnues :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \ \ et \ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

2. Pour chacun des points trouvés, calculer $s^2 - rt$, et conclure à l'aide du théorème ci-dessus.

Exemple 30 *Soit $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.*

Ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2 sont :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 3x^2 + 3y^2 - 15, \ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 6xy - 12, \ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6x \\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 6y \ \ et \ \ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 6x
\end{aligned}$$

On cherche d'abord les points critiques en résolvant le système

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \ \ et \ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

soit

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \dfrac{4}{x^2} - 5 = 0 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(y = \frac{2}{x}\right) \ \ et \ \ \left(x^2 = 1 \ \ ou \ \ x^2 = 4\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x = 1 \ \ et \ \ y = 2) \ \ ou \ \ (x = -1 \ \ et \ \ y = -2) \\ ou \ \ (x = 2 \ \ et \ \ y = 1) \ \ ou \ \ (x = -2 \ \ et \ \ y = -1) \end{cases}$$

Donc f admet 4 points critiques : $A = (1,2)$, $B = (-1,-2)$, $C = (2;1)$ et $D = (-2,-1)$.

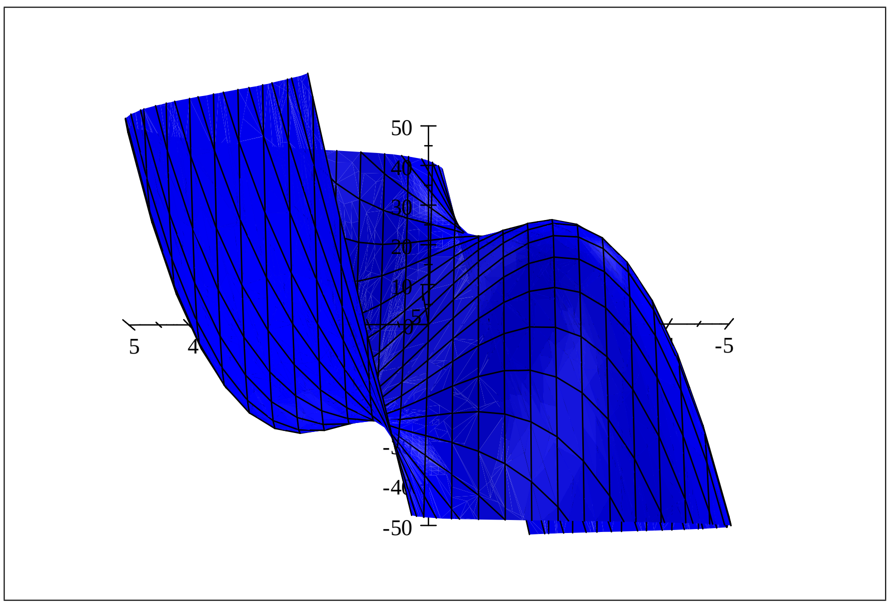
Pour chacun d'entre eux calculons $s^2 - rt$

- *Pour* A*, on a* $r = t = 6$ *et* $s = 12$ *d'où* $s^2 - rt = 108 > 0$ *donc* f *n'admet pas d'extremum en* A*.*

- *Pour* B*, on a* $r = t = -6$ *et* $s = -12$ *d'où* $s^2 - rt = 108 > 0$ *donc* f *n'admet pas d'extremum en* B*.*

- *Pour* C*, on a* $r = t = 12$ *et* $s = 6$ *d'où* $s^2 - rt = -108 < 0$ *et* $r > 0$ *donc* f *admet un minimum local au point* $C = (2;1)$*, et ce minimum vaut* $f(2,1) = -28$*.*

- *Pour* D*, on a* $r = t = -12$ *et* $s = -6$ *d'où* $s^2 - rt = -108 < 0$ *et* $r < 0$ *donc* f *admet un maximum local au point* $D = (-2,-1)$*, et ce maximum vaut* $f(-2,-1) = 28$*.*



1.1.5 Fonctions différentiables de deux variables.

Rappel 31 *Une application $l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est dite forme linéaire s'il existe deux réels α et β tels que $l(x,y) = \alpha x + \beta y$ pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$. Autrement dit, l vérifie la condition*

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : l(\alpha u + \beta v) = \alpha l(u) + \beta l(v)$$

Définition 32 *Soit f une fonction d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et a un point de U. On dit que f est différentiable en a s'il existe une forme linéaire l_a sur $\mathbb{R}^2$ telle que*

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0, a+h \in U}} \frac{f(a+h) - f(a) - l_a(h)}{\|h\|_2} = 0 \tag{1}$$

Autrement dit : Il existe une fonction ε telle que

$$f(a+h) = f(a) + l_a(h) + \|h\|_2 \, \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \tag{2}$$

La forme linéaire l_a s'appelle différentielle de f en a et se note $D_a f$.

Remarque 33 *1. Si $a = (a_1, a_2)$ et $h = (h_1, h_2)$, (1) et (2) est équivalentes respectivment à*

$$\lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \frac{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) - l_a(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

et

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = l_a(h_1, h_2) + \sqrt{h_1^2 + h_2^2} . \varepsilon(h_1, h_2) \text{ avec } \lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \varepsilon(h_1, h_2) = 0$$

2. On utilise souvent la formule (2) pour trouver la forme linéaire l_a, c.à.d. démontrer la différentiabilité de f en a.

Proposition 34 *La forme linéaire l_a introduite dans le définition précédente, quand elle existe, est unique.*

Définition 35 *Si f est différentiable en tout point de U, on dit que f est différentiable sur U.*

Exemple 36 ***1.*** *Il résulte de la définition que tout polynôme de degré 1 au plus un est différentiable partout. En effet :*

Soit $f(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ *le polynôme de degré au plus. On a*

$$\begin{aligned} f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1,a_2) &= \alpha(a_1+h_1) + \beta(a_2+h_2) + \gamma - (\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma) \\ &= \alpha h_1 + \beta h_2 \\ &= l_a(h_1,h_2) + \sqrt{h_1^2+h_2^2} \times 0 \text{ avec } l_a(h_1,h_2) = \alpha h_1 + \beta h_2 \end{aligned}$$

il est clair que l_a *est une forme linéaire.*

2. *Soit* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. *Montrer que* f *est différentielle à l'origine. En effet, en prenant* $(a_1,a_2) = (0,0)$, *on a* $f(0,0) = 0$ *et* $\forall (h_1,h_2) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} \frac{f(a_1+h_1,a_2+h_2) - f(a_1,a_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} &= \frac{\dfrac{h_1^2h_2^2}{h_1^2+h_2^2} - 0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\ &= \frac{h_1^2h_2^2}{\left(h_1^2+h_2^2\right)^{3/2}} \\ &\leq \frac{\left(h_1^2+h_2^2\right)^2}{2\left(h_1^2+h_2^2\right)^{3/2}} \text{ (puisque } \left(h_1^2+h_2^2\right)^2 = h_1^4+h_2^4+2h_1^2h_2^2 \geq 2h_1^2h_2^2) \\ &\leq \frac{1}{2}\sqrt{h_1^2+h_2^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(a_1+h_1,a_2+h_2) - f(a_1,a_2) - 0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

De (1), *on déduit que* f *est différentiable en* $(0,0)$ *et son différentielle est la forme linéairenulle* $D_{(0,0)}f = 0$.

Théorèm 37 *Si* f *est différentiable en* a, *alors* f *est continue en* a.

Preuve. Il en résulte directement de (2), quand h tend vers 0. ■

Le théorème fondamental suivant représente les fonctions linéaires de la définition de la différentiabilité à l'aide de dérivées partielles.

Théorèm 38 *Si une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en un point $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{U}$, alors f admet en a les dérivée partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$ et on a*

1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = D_a(1,0)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = D_a(0,1)$

2) $D_a(h_1, h_2) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) \cdot h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \cdot h_2$ *pour tout* $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

Preuve. 1) L'hypothèse de différentiabilité de f en a s'écrit

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = D_a(h_1, h_2) + \sqrt{h_1^2 + h_2^2}.\varepsilon(h_1, h_2) \text{ avec } \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1, h_2) = 0$$

Pour $h_2 = 0$, on a

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2) &= D_a(h_1, 0) + \sqrt{h_1^2}.\varepsilon(h_1, 0) \text{ avec } \lim_{(h_1,0)\to(0,0)} \varepsilon(h_1, 0) = 0 \\ &= D_a[h_1(1,0)] + |h_1|.\varepsilon_1(h_1) \text{ avec } \lim_{h_1\to 0} \varepsilon_1(h_1) = 0 \\ f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2) &= h_1(D_a(1,0) + \varepsilon_1(h_1)) \text{ (puisque } D_a \text{ est une forme linéaire)} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{h_1} = D_a(1,0) + \varepsilon_1(h_1)$$

le passage à la limite quand $h_1 \to 0$, on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = D_a(1,0)$.

- De même si $h_1 = 0$ on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = D_a(0,1)$

2) En tenant compte du fait que $D_a f$ est une forme linéaire et d'après 1), on a : $\forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} D_a(h_1, h_2) &= D_a[h_1(1,0) + h_2(0,1)] \\ &= h_1 D_a(1,0) + h_2 D_a(0,1) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \cdot h_2 \end{aligned}$$

■

Théorèm 39 *Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $a \in U$. Si les dérivées partielles d'ordre 1 de f existent et sont continues en a (resp. sur U), alors f est différentiable en a (resp. sur U).*

Corollaire 40 *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ en a (resp. sur U), alors f est différentiable en a (resp. sur U).*

Remarque 41 *Par les théorème 37,38 et 39, nous avons les deux implications suivantes:*

(I) *Si f est différentiable en a, alors f est continue en a, et ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont finies en a.*

(II) *Si les dérivées partielles d'ordre 1 existent au voisinage de a et sont continues en a, alors f est différentiable en a.*

▶ On montre que les réciproques de ces implications sont fausses.

Exemple 42 *Implication (I) : Soit* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} \ \ si \ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ \ si \ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *. On va montrer que f est continue en $(0,0)$ et ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont finies mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$.*

f est continue en $(0,0)$ (déjà démontré voir continuité) et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, *en effet:*

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{\dfrac{x^2 \times 0}{x^2+0^2} - 0}{x} = 0 \ \ et \ \ \lim_{\substack{y\to 0 \\ y\neq 0}} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{\substack{y\to 0 \\ y\neq 0}} \frac{\dfrac{0 \times^2 y}{0^2+y^2} - 0}{y} = 0$$

Mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$, en effet :

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2 x \sin x}{r^2.r} \\ &= \cos^2\theta\sin\theta,\ \forall\theta \in [0, 2\pi[\end{aligned}$$

d'où la limite n'existe pas.

Implication (II) *: Soit* $f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \sin \dfrac{1}{x} \ \ si\ x \neq 0 \\ 0\ \ si\ x = 0 \end{cases}$. *On va montrer que pour tout* $a \in \mathbb{R}$, f *est différentiable en* $(0,a)$, *mais l'une au moins de ses dérivées partielles d'ordre 1 n'est pas continue en* $(0,a)$. *On a* $f(0,a) = 0$ *et*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x,a) - f(0,a)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x^2 a \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left(ax \sin \frac{1}{x} \right) = 0$$

et

$$\lim_{\substack{y \to a \\ y \neq a}} \frac{f(0,y) - f(0,a)}{y - a} = \lim_{\substack{y \to a \\ y \neq a}} \frac{0 - 0}{y - a} = 0$$

Donc f *admet des dérivées partielles d'ordre 1 en* $(0,a)$ *tels que* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,a) = 0$. *Pour la différentiabilité de* f *en* $(0,a)$, *(en posant* $h_1 = x$ *et* $h_2 = y - a$*) on a*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(h_1, h_2 + a) - f(0,a) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,a) h_1 - \frac{\partial f}{\partial x}(0,a) h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \\ = & \left| \frac{h_1^2 (h_2 + a) \sin \frac{1}{h_1} - 0 - 0 \times h_1 - 0 \times h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \\ = & \left| \frac{h_1^2 (h_2 + a) \sin \frac{1}{h_1}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \\ \leq & \ |(h_2 + a)| \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \to 0 \ si \ (h_1, h_2) \to (0,0) \end{aligned}$$

f *est donc différentielle en* $(0,a)$. *Par contre, on montre qu'au moins une des dérivées partielles d'ordre 1 de* f *n'est pas continue en* $(0,a)$. *En effet,*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right),\ si\ x \neq 0 \\ 0,\ si\ x = 0 \end{cases} \quad et \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x},\ si\ x \neq 0 \\ 0,\ si\ x = 0 \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que

$$\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,a) \text{ et pour } a=0, \text{ on a } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

mais pour $a \neq 0$, $\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *n'existe pas puisque* $\lim_{x,\to 0}\left(a\cos\frac{1}{x}\right)$ *n'existe pas. On déduit que* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *est discontinue en* $(0,a)$.

1.1.6 Gradient et Matrice jacobienne d'une fonctions de deux variables.

Définition 43 *Si* $f : U \to \mathbb{R}$, *où* U *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *admettant des dérivées partielles en* $(a_1,a_2) \in U$, *on appelle gradient de* f *en* (a_1,a_2) *le vecteur de* $\mathbb{R}^2$ *noté* $\operatorname{grad} f(a_1,a_2)$ *ou* $\nabla f(a_1,a_2)$ *défini par*

$$\operatorname{grad} f(a_1,a_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2), \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\right)$$

Définition 44 *Si* $f = (f_1,f_2,f_3) : U \to \mathbb{R}^3$ *où* U *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *admettant des dérivées partielles en* $(a_1,a_2) \in U$, *on appelle matrice jacobienne de* f *en* (a_1,a_2) *la matrice à* 3 *lignes et* 2 *colonnes notée* $J_f(a_1,a_2)$ *définie par*

$$J_f(a_1,a_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a_1,a_2) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a_1,a_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a_1,a_2) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a_1,a_2) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(a_1,a_2) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(a_1,a_2) \end{pmatrix}$$

autrement dit

$$J_f(a_1,a_2) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(a_1,a_2) \\ \operatorname{grad} f_2(a_1,a_2) \\ \operatorname{grad} f_3(a_1,a_2) \end{pmatrix}$$

Exemple 45 *1. Soit* $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2+1\right)$. *Pour tout* (x,y) *de* $\mathbb{R}^2$, *on a*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$$

d'où le gradient de f en tout (x, y) est donné par

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

on a par exemple

$$\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0), \ \operatorname{grad} f(1,-1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3} \right) \ \textit{et} \ \operatorname{grad} f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

2. Soit $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - 3xy + 2y^3 \\ 2x^3 - xy - 3y^2 \\ -x^2 + 2xy + 4y^2 \end{pmatrix}$. *On a : $f = (f_1, f_2, f_3)$ telle que pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$*

$$f_1(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^3, \ f_2(x, y) = 2x^3 - xy - 3y^2 \ \textit{et} \ f_2(x, y) = -x^2 + 2xy + 4y^2$$

d'où la matrice jacobienne de f en tout (x, y) est donnée par

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 3y & -3x + 6y^2 \\ 6x^2 - y & -x - 6y \\ -2x + 2y & 2x + 8y \end{pmatrix}$$

on a par exemple

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ J_f(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -7 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \ \textit{et} \ J_f(1,-2) = \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 8 & 11 \\ -6 & -14 \end{pmatrix}$$

Remarque 46 *On peut écrire les différentielles en utilisant la notion du gradient de f en a (si f est réelle), sous la forme*

$$\forall h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 : D_a f(h) = \langle \operatorname{grad} f(a), h \rangle$$

et en utilisant la notion de la matrice jacobienne de f en a (si f est vectorielle) sous la forme

$$\forall h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 : D_a f(h) = J_f(a).h$$

où le symbole $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^2$qui est défini par

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2\ ,\ \forall x = (x_1, x_2)\ ,\ y = (y_1, y_2)$$

1.1.7 Dérivée suivant un vecteur ou dérivée directionnelle. Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et a un point de U, v un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$ (c.à.d. $\|v\|_2 = 1$) de telle sorte que la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ soit définie dans un voisinage de 0.

Définition 47 *Si la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0, la dérivée de $t \mapsto f(a + tv)$ en 0 s'appelle dérivée de f en a suivant le vecteur v et se note $d_v f(a)$ qui est donnée par*

$$d_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

$d_v f(a)$ est dite aussi la dérivée directionnelle de f en a dans la direction v.

Remarque 48 *Si $a = (a_1, a_2)$ et $v = (v_1, v_2)$, la dérivée $d_v f(a)$ est donnée par*

$$d_{(v_1,v_2)} f(a_1, a_2) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2) - f(a_1, a_2)}{t}$$

Théorèm 49 *Si la fonction f est différentiable en $a \in U$, alors la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable sur un voisinage de 0 pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^2$ et sa dérivée est $\langle \operatorname{grad} f(a), v\rangle$. En particulier si $\|v\| = 1$, alors la dérivée directionnelle de f en a dans la direction de v existe et sa valeur est donnée par*

$$d_v f(a) = \langle \operatorname{grad} f(a), v\rangle$$

Remarque 50 *Si $\|v\| \neq 1$, on prend $d_v f(a) = \dfrac{\langle \operatorname{grad} f(a), v\rangle}{\|v\|}$*

Exemple 51 *Soit* $f(x,y) = x^3 - 2xy^2 + 3y^2$. *Calculer la dérivée directionnelle de* f *au point* $(1,-1)$ *suivant le vecteur* $v = (1,2)$. *En effet, Pour tout* (x,y) *de* $\mathbb{R}^2$, *on a* $\|v\| = \sqrt{5}$ *et*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 2y^2 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4xy + 6y$$

d'où

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(1,-1) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)\right) \\ &= (1,-2) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} d_v f(1,-1) &= \frac{\langle \operatorname{grad} f(a), v\rangle}{\|v\|} \\ &= \frac{\langle (1,-2), (1,2)\rangle}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1 \times 1 + (-2) \times 2}{\sqrt{5}} \\ &= -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

1.1.8 Linéarité et composition de fonctions différentiables.

1.1.8.1 Linéarité de la différentielle.

Proposition 52 *On suppose que f et g sont deux fonctions de l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^p$ en général) différentiables en $a = (a_1, a_2) \in U$. Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ la fonction $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a de différentielle*

$$D_a (\lambda f + \mu g) = \lambda D_a f + \mu D_a g$$

c.à.d.

$$\forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 : D_a (\lambda f + \mu g) (h_1, h_2) = \lambda D_a f (h_1, h_2) + \mu D_a g (h_1, h_2)$$

1.1.8.2 Composition de fonctions différentiables. La propriété suivante généralise la propriété de dérivation pour la composée de fonctions d'une variable réelle.

Proposition 53 *On suppose que $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in U$. Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $f(U)$ et $g : V \to \mathbb{R}^q$ une application différentiable en $f(a)$. Alors l'application $g \circ f$ est différentiable en a de différentielle*

$$D_a (g \circ f) = D_{f(a)} g \circ D_a f$$

En forme matricielle on obtient

$$J_a (g \circ f) = J_{f(a)} (g) . J_a (f)$$

où $J_a (f)$, $J_{f(a)} (g)$ et $J_a (g \circ f)$ sont respectivement les matrices jacobiennes des applications linéaires $D_a f$, $D_{f(a)} g$ et $D_a (g \circ f)$ telles que $J_a (f)$ est de p lignes et n collones, $J_{f(a)} (g)$ est de q lignes et p collones et $J_a (g \circ f)$ est de q lignes et n collones.

Quelques cas particuliers

1. Si $n=2, p=1, q=1$, on a $a=(a_1,a_2)$ et

$$\begin{aligned}
D_a(g\circ f) &= g'(f(a_1,a_2))\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2), \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\right)\\
&= \left(\left(g'\circ f\right)(a_1,a_2)\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2), \left(g'\circ f\right)(a_1,a_2)\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\right)
\end{aligned}$$

d'où les dérivées partielles de $g\circ f$ en (a_1,a_2) sont données par

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(a_1,a_2)=\left(g'\circ f\right)(a_1,a_2)\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) \text{ et } \frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(a_1,a_2)=\left(g'\circ f\right)(a_1,a_2)\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)$$

2. Si $n=2, p=3, q=1$, on $a=(a_1,a_2)$, $f(x,y)=(f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$ et

$$\begin{aligned}
D_a(g\circ f) &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}(f(a_1,a_2)), \frac{\partial g}{\partial y}(f(a_1,a_2)), \frac{\partial g}{\partial z}(f(a_1,a_2))\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a_1,a_2) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a_1,a_2)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a_1,a_2) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a_1,a_2)\\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(a_1,a_2) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(a_1,a_2)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(f(a_1,a_2))\frac{\partial f_1}{\partial x}(a_1,a_2)+\frac{\partial g}{\partial y}(f(a_1,a_2))\frac{\partial f_2}{\partial x}(a_1,a_2)+\frac{\partial g}{\partial z}(f(a_1,a_2))\frac{\partial f_3}{\partial x}(a_1,a_2)\\ \frac{\partial g}{\partial x}(f(a_1,a_2))\frac{\partial f_1}{\partial y}(a_1,a_2)+\frac{\partial g}{\partial y}(f(a_1,a_2))\frac{\partial f_2}{\partial y}(a_1,a_2)+\frac{\partial g}{\partial z}(f(a_1,a_2))\frac{\partial f_3}{\partial y}(a_1,a_2)\end{pmatrix}^T
\end{aligned}$$

3. Si $n=2, p=1, q=3$, on $a=(a_1,a_2)$, $g=(g_1,g_2,g_3)$ et

$$\begin{aligned}
D_a(g\circ f) &= \begin{pmatrix} g_1'(f(a_1,a_2))\\ g_2'(f(a_1,a_2))\\ g_3'(f(a_1,a_2))\end{pmatrix}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(a_1,a_2), \frac{\partial f_1}{\partial y}(a_1,a_2)\right)\\
&= \begin{pmatrix} g_1'(f(a_1,a_2))\frac{\partial f_1}{\partial x}(a_1,a_2) & g_1'(f(a_1,a_2))\frac{\partial f_1}{\partial y}(a_1,a_2)\\ g_2'(f(a_1,a_2))\frac{\partial f_1}{\partial x}(a_1,a_2) & g_2'(f(a_1,a_2))\frac{\partial f_1}{\partial y}(a_1,a_2)\\ g_3'(f(a_1,a_2))\frac{\partial f_1}{\partial x}(a_1,a_2) & g_2'(f(a_1,a_2))\frac{\partial f_1}{\partial y}(a_1,a_2)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exemple 54 *Soit $f(x,y)=x^3+xy^2$ et $h(x,y)=f(y,x)$. Calculer par deux méthodes la différentielle de h en tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$.*

- La méthode directe :

On a $h(x,y) = f(y,x) = y^3 + yx^2$ *(mettre* x *à la place de* y *et* y*à la place de* x*), il est clair que* h *est différentiable sur* $\mathbb{R}^2$ *et son différentielle est donnée par*

$$Dh_{(x,y)} = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y), \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right) = \left(2xy, 3y^2 + x^2\right)$$

autrement dit

$$\forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 : Dh_{(x,y)}(h_1, h_2) = \left\langle \left(2xy, 3y^2 + x^2\right), (h_1, h_2)\right\rangle = 2xyh_1 + \left(3y^2 + x^2\right) h_2$$

- La méthode de composition : Posons $g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y)) = (y,x)$

On a

$$h(x,y) = f(y,x) = f(g(x,y)) = (f \circ g)(x,y)$$

d'où

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{R}^2 \overset{h=f\circ g}{\rightarrow} \mathbb{R}$$

Donc

$$D_{(x,y)}h = D_{g(x,y)}f \circ D_{(x,y)}g = D_{(y,x)}f \circ D_{(x,y)}g$$

En terme matriciel, on a

$$\begin{aligned}
J_{(x,y)}(h) &= J_{(y,x)}(f) \,. J_{(x,y)}(g) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{y},\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{y},\mathbf{x})\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\
&= \left(3y^2 + x^2, 2yx\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left(2xy, x^2 + 3y^2\right)
\end{aligned}$$

Remarque 55 *Pour le calcul de* $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{y},\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{y},\mathbf{x})\right)$, *on calcule* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *puis on remplace* x *par* y *et* y *par* x.

Théorèm 56 (des fonctions implicites) *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et (a,b) un point de U tel que*

$$f(a,b) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$$

Alors, il existe deux ouverts I et J de $\mathbb{R}$, et une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur I à valeurs dans J, tels que :

1. *$(a,b) \in I \times J \subset U$. (c.à.d. $I \times J$ est un voisinage de (a,b))*
2. *Pour tout couple (x,y) de $I \times J$,*

$$f(x,y) = 0 \Rightarrow y = g(x)$$

3. *Pour tout x de U, on a*

$$f(x, g(x)) = 0$$

4. *Pour tout couple $(x,y) \in I \times J$:*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0 \text{ et } g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$$

Exemple 57 *Montrer que l'équation*

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

admet une solution $y = g(x)$ pour des valeurs de x au voisinage de 0. En effet :

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et on a

$$f(0,1) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \neq 0 \text{ (puisque } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\text{)}$$

D'après le théorème des fonctions implicites, ils existent deux voisinage $]-r,r[$ et $]1-q,1+q[$ de 0 et 1 respectivement tels que

$$\forall (x,y) \in]-r,r[\cup]1-q,1+q[: f(x,y) = 0 \Rightarrow y = g(x)$$

soit

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ donne } g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

il est bien clair que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-r,r[$ (il suffit de prendre $0 < r < 1$ quelconque) et on a

$$\begin{aligned} \forall x \in]-r,r[: g'(x) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)}{\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)} \\ &= -\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

puisque $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$ (on renplace y par $\sqrt{1-x^2}$).

- Effectivement, on sait bien que $\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1.2 Fonctions de plusieurs variables (généralisation du cas n=2)

Pour l'étude des fonctions de plusieurs variables ($n \geq 2$), il suffit de généraliser toutes les notions que nous avons déjâ traité dans le cas de deux variables. **Vous pouvez consulter les notes de cours que je vais vous envoyer (vous pouvez voir d'autres notes ou ouvrages sur internet).**