EXERCICES MATH2 (Master 1: Theoretical Physics)

Kamel Bencheikh

Laboratory of Quantum Physics and Dynamical Systems. Department of Physics. Ferhat Abbas University of Setif-1. Campus EI-Bez, Road of Algiers, 19137 Setif, Algeria. *

(Dated: April 3, 2020)

*Electronic address: `bencheikhkml@univ-setif.dz\\\\\\`

Université Ferhat Abbas Sétif-1 **K.B**
Département de physique April 2020
Master 1 Physique Théorique

Exercices : Math 2 (S2)

Les notations du cours sont utilisées

Exercice 1 : Simplifier les expressions et commenter les résultats obtenus.

$$\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)H(x)e^{\alpha x};\qquad \left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda^2\right)\frac{H(x)\sin(\lambda x)}{\lambda}$$

Exercice 2 : Exprimer la fonction porte $\Pi(x)$ en fonction de $H\left(x-\frac{1}{2}\right)$ et $H\left(x+\frac{1}{2}\right)$ et en déduire la dérivée au sens des distributions de $\Pi(x)$.

Exercice 3 :

1) Calculer les dérivées au sens des distributions des fonctions suivantes:

$$u(x)=\cos x,\quad x>0\quad \text{et}\qquad u(x)=0,\quad x<0$$
$$v(x)=x^2,\quad |x|\leq 1\qquad \text{et}\qquad v(x)=0,\quad |x|>1$$

2) Exprimer la fonction suivante en fonction de $H(x-\pi)$ et $H(x+\pi)$:

$$v(x)=\sin x,\quad |x|\leq\pi\quad \text{et}\qquad v(x)=0,\quad |x|>\pi$$

et calculer ensuite la dérivée 1^{ere} et 2^{eme} au sens des distributions.

Exercice 4 :

I) Représenter graphiquement la fonction $H(1-|x|)$. Exprimer cette dernière en fonction de la fonction de Heaviside avec des arguments sans la valeur absolue. En déduire alors la dérivée au sens des distributions de $H(1-|x|)$.

II) Mêmes questions pour la fonction $H(1-x^2)$

Exercice 5 : " *Valeur principale de Cauchy* "

On considère la fonction $\frac{\varphi(x)}{x}$ où $\varphi(x) \in D$. Dîtes pourquoi cette fonction n'est en général pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

2) On va montrer que $Lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right] = Lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{+\epsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right]$, existe toujours. Vérifier que: $Lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right] = Lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{+\epsilon}^{+\infty}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right)dx\right]$ et montrer que l'intégrant est parfaitement défini quand $x \to 0$.

3) Cette quantité est appelée valeur principale de Cauchy et on note la distribution singulière valeur principale de Cauchy par $T = vp\frac{1}{x}$ et définie par :

$$\langle T,\varphi\rangle = \left\langle vp\frac{1}{x},\varphi\right\rangle = Lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{+\epsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right]$$

montrer que:

$$\frac{d\ln(|x|)}{dx} = vp\frac{1}{x}, \qquad x\left(vp\frac{1}{x}\right) = 1$$

Exercice 6 :

1) On suppose $a < b$, exprimer la fonction $H\left[(x-a)(x-b)\right]$ en fonction de $H(x-a)$ et $H(x-b)$.

2) En notant que $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$, montrer en dérivant la relation obtenue précédemment que:

$$\delta\left[(x-a)(x-b)\right] = \frac{1}{|b-a|}\left[\delta(x-a) + \delta(x-b)\right]$$

3) Vérifier que la relation ci-dessus peut être déduite de la relation plus générale suivante

$$\delta\left[g(x)\right] = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{|g'(x_k)|}\delta(x-x_k)$$

où la fonction $g(x)$ admet des racines simples x_k et $g'(x_k) \neq 0$.

4) En théorie quantique relativiste, on rencontre cette expression: $\delta\left[E^2 - p^2c^2 - m_0^2c^4\right]$. Montrer que :

$$\delta\left[E^2 - p^2c^2 - m_0^2c^4\right] = \frac{\delta\left[E - \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}\right]}{2\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}} + \frac{\delta\left[E + \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}\right]}{2\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}}$$

Produit de convolution

Exercice 7 :

Calculer les produits de convolutions suivants:

1) $(H(x)\cos(2x) * (H(x)\sin x)$.
2) $e^{-x^2} * e^{-x^2}$
3) $\delta'(x) * \sin x$
4) $\delta''(x) * H(x)$
5) $H(1-|x|) * H(1-|x|)$
6) $[\delta'(x) + \kappa\delta(x)] * H(x)e^{-\kappa x}$ et dire alors que représente la quantité $H(x)e^{-\kappa x}$.

Exercice 8 :

I) En utilisant le raisonnement par récurrence montrer la relation :

$$\delta^{(m)} * \frac{H(x)x^{m-1}}{(m-1)!} = \delta$$

II) Le but de cette question est de calculer l'inverse de convolution de la distribution : $\left[\delta''(x) + 4\delta'(x) + 3\delta(x)\right]$, c'est à dire on cherche la distribution S telle que : $\left[\delta''(x) + 4\delta'(x) + 3\delta(x)\right] * S = \delta$.

1) Vérifier que : $\left[\delta''(x) + 4\delta'(x) + 3\delta(x)\right] = [\delta'(x) + \delta(x)] * [\delta'(x) + 3\delta(x)]$

2) En utilisant la propriété: $\left[\delta''(x) + 4\delta'(x) + 3\delta(x)\right]^{-1} = [\delta'(x) + 3\delta(x)]^{-1} * [\delta'(x) + \delta(x)]^{-1}$ et le résultat de la question (6) de l'exercice précédent, en déduire que :

$$S = H(x)e^{-3x} * H(x)e^{-x}$$

Vérifier que :

$$S = \frac{1}{2}H(x)\left[e^{-x} - e^{-3x}\right]$$

3) Soit l'équation différentielle : $\ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) + 3x(t) = F(t)$. Donner l'expression générale de la solution particulière.

Transformations de Fourier et de Laplace

Exercice 9 : Utiliser la relation $TF\left[f(x) * g(x)\right] = \sqrt{2\pi}F(k)G(k)$ pour déduire

$$TF\left[f(x)g(x)\right] = \sqrt{2\pi}F(k) * G(k)$$

Exercice 10 :

1) Calculer $TF\left[e^{-\alpha|x|}\right]$ où α réel positif.

2) Utiliser le résultat pour calculer le produit de convolution $\frac{2\alpha}{\alpha^2+x^2} * \frac{2\beta}{\beta^2+x^2}$.

3) Utiliser la transformation de Fourier pour calculer l'intégrale suivante: $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 11 :

Calculer la $TF\left(e^{-r^2}\right)$ à deux dimensions où $r^2 = x^2 + y^2$

Exercice 12 :

Calculer les transformées de Fourier de

a) $\delta(x+a)$

b) $\frac{1}{2}\left[\delta(x+\frac{1}{2}) + \delta(x-\frac{1}{2}\right]$

c) $\delta(x,y)$

d) $\delta(x-a, y-b)$

Exercice 13 :

On rappelle que si une fonction $f(x)$ est périodique de période T c'est à dire $f(x+T) = f(x)$, on peut la décomposer en série de Fourier comme suit:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}; \quad \text{avec } \; c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}dx$$

1) On considère la distribution appelée peigne de Dirac définie comme : $III(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - 2n\pi)$. Représenter graphiquement $III(x)$ et vérifier qu'elle est périodique.

2) Utiliser la décomposition en série de Fourier pour montrer que

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - 2n\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{inx}$$

3) En prenant la TF des deux membres, en déduire que

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(k-n) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-2ink}$$

Exercice 14 :

Dans le modèle en couches, on peut considerer les protons du noyau atomique d'oxygène ${}^{16}_{8}O$ comme soumis à un potentiel moyen d'oscillateur harmonique isotrope $V(r) = m\omega^2 r^2/2$. On montre que la densité des 8 protons est donnée par

$$\rho_p(\overrightarrow{r}) = \frac{2\alpha^3}{\pi^{3/2}}\left(1 + 2\alpha^2 r^2\right) e^{-\alpha^2 r^2}, \text{ avec } \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

1) Quelle est la dimension de α.

2) Calculer $\int \rho_p(\overrightarrow{r}) d\overrightarrow{r}$

3) Calculer le facteur de forme de diffusion élastique : $F(\overrightarrow{q}) = \int \rho_p(\overrightarrow{r}) e^{-i\overrightarrow{q}.\overrightarrow{r}} d\overrightarrow{r}$

Exercice 15 :

Le but de cet exercice est de calculer la **transformée de Fourier de la fonction** $sgn(x)$.

1) Calculer directement $TF\left[\Pi(x)\right]$.

2) Vérifier que $\Pi(x) = \left[sgn(x + 1/2) + sgn(x - 1/2)\right]/2$.

3) En utilisant cette dernière relation, montrer que

$$TF\left[\Pi(x)\right] = i\left[\sin(k/2)\right] TF\left[sgn(x)\right]$$

4) En comparant ce résultat avec celui obtenu dans la question (1), en déduire $TF\left[sgn(x)\right]$

Exercice 16 :

1) Exprimer la fonction de heaviside $H(x)$ en fonction de la fonction $sgn(x)$.

2) Utiliser le résultat de l'exercice précédent pour calculer $TF\left[H(x)\right]$.

Exercice 17 :

Soit la fonction $f(x) = 1 - |x|/2$ pour $|x| < 2$ et $f(x) = 0$ ailleurs.

1) Tracer graphiquement $f(x)$, calculer ensuite $TF\left[f(x)\right]$.

2) Utiliser le résultat pour évaluer l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx$.

Exercice 18 :

Soit $\Psi(\overrightarrow{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \exp[-\frac{r}{a_0}]$ la fonction d'onde de l'état fondamental de l'électron de l'atome d'hyrogène où $a_0 = \frac{\hbar^2}{2\mu}$. Montrer que la fonction d'onde en représentation $\overrightarrow{p}$ est donnée par :

$$\overline{\Psi}(\overrightarrow{p}) = \frac{\alpha}{(a_0^2 \overrightarrow{p}^2 + \hbar^2)^2}, \quad \text{où } \alpha \text{ est à déterminer}$$

.

K.B

Exercice 19 :

Le facteur de forme $F(\overrightarrow{k})$ est la densité de charge $\rho(\overrightarrow{r})$ sont reliées par la relation $F(\overrightarrow{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \rho(\overrightarrow{r}) e^{-i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}} d\overrightarrow{r}$.

Si le facteur de forme est donné par $F(\overrightarrow{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{a^2}{(a^2+\overrightarrow{k}^2)}$, en déduire que la densité correspondante est

$$\rho(\overrightarrow{r}) = \frac{a^2}{4\pi} \frac{e^{-ar}}{r}$$

Exercice 20 :

Dans la suite la notation $L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$, $(\mathrm{Re}(s) > 0)$, désigne la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$.

I) Montrer que:

$$L\left[te^{-\frac{t^2}{4a}}\right] = 2a - 2\sqrt{\pi} a^{\frac{3}{2}} s e^{as^2} \operatorname{erf} c\left[s\sqrt{a}\right]$$

II) 1) Montrer que

$$L[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$
$$L[tf''(t)] = -s^2\frac{dF(s)}{ds} - 2sF(s) + f(0)$$

2)On rappelle que la fonction de Bessel cylindrique $J_\nu(x)$ obeit : $x^2 J''_\nu + xJ'_\nu(x) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) = 0$ et on cherche à calculer la transformée de Laplace $J_0(x)$ que l'on note par : $F_0(s)$. En prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle et en utilisant les résultats de la question (1) ci-dessus, montrer que:

$$\frac{F'_0(s)}{F_0(s)} = -\frac{s}{s^2+1}$$

3) On note que $J_0(0) = 1$, en déduire:

$$F_0(s) = \int_0^\infty J_0(t)e^{-st}dt = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

Exercice 21 :

Représenter chacune des fonctions suivantes ($k > 0$) et calculer ensuite leurs transformées de Laplace.

1) $H(t-k)$ 2) $(t-k)H(t-k)$ 3) $H(t) - H(t-k)$

4) $\sum_{n=0}^{\infty} H(t-nk)$ 5) $2\sum_{n=0}^{\infty} H(t-(2n+1)k)$ 6) $2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H(t-(2n+1)k)$

Exercice 22 :

Représenter les distributions suivantes et calculer ensuite leurs transformées de Laplace

1) $\delta(t-k)$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nk)$ 3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta(t-nk)$

4) $2\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-(2n+1)k)$ 5) $2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta(t-(2n+1)k)$

Méthode WKB

Exercice 23 :

I) Déterminer les points tournants des potentiels suivants (avec $\kappa > 0$) :

$$V(x) = \kappa |x|$$

et

$$V(x) = \kappa |x| \quad \text{pour} \quad x > 0; \qquad V(x) = +\infty \quad \text{pour} \quad x < 0)$$

II) On considère une particule de masse m soumise au potentiel $V(x) = \kappa |x|$ (avec $\kappa > 0$).

1) Représentez le graphe de ce potentiel.

3) Calculer les énergies E_n dans l'approximation WKB.

4) L'énergie exacte du 1er niveau excité est donnée par

$$E_1^{exact} = 2.3381 \left(\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} \right)^{1/3}$$

Comparer cette énergie avec celle obtenue par WKB.

Exercice 24 :

On considère une particule de masse m soumise au potentiel suivant appelé semi-harmonique (half harmonic potential) défini par

$$V(x) = +\infty \qquad \text{pour} \quad x < 0$$
$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \qquad \text{pour} \quad x > 0$$

1) Représentez le graphe de ce potentiel.

3) Calculer les énergies E_n dans l'approximation WKB. Que remarquez-vous.

Exercice 25 :

Calculer, dans l'approximation WKB, le coefficient de transmission d'une particule de masse m et d'énergie $E < V_0$, à travers la barrière parabolique

$$V(x) = V_0 \left[1 - x^2/a^2\right] \qquad \text{pour} \ |x| < a$$
$$V(x) = 0 \qquad \text{ailleurs.}$$

Exercice 26 :

Utiliser la méthode WKB pour estimer le coefficient de transmission d'une particule de masse m et d'énergie $E < V_0$ à travers la barrière

$$
\begin{aligned}
V(x) &= V_0 \exp\left[-x/a\right] &\qquad |x| \geqslant 0 \\
V(x) &= 0 &\qquad x < 0
\end{aligned}
$$

On pourra utiliser le *changement de variable* suivant, $u = \alpha e^{-\beta x} - 1$.