UFA Sétif 1, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences.
Master I: Optimisation et théorie de contrôle. Module : Problèmes coniques.
Enseignant : M. ACHACHE. Semestre II. Année scolaire : 2019/2020.

Série d'exercices N°2

Dualité conique

Exercice 1 *Etant données une matrice $a_i \in \mathbb{E}, i = 1, \ldots, m, b_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \ldots, m$ et $c \in \mathbb{R}^n$, un programme linéaire conique primal (PLC) sous forme standard est défini comme suit :*

$$(\mathcal{P}) \qquad p^* = \min_{x \in K} c \bullet x : \ a_i \bullet x = b_i, i = 1, \ldots, m, \qquad \text{(SOCP)}$$

où $\mathbb{K}$ est un cône convexe fermé d'un espace vectoriel Euclidien $\mathbb{E}$ muni d'un produit scalaire noté par $x \bullet y$.

1. *Montrer que son dual au sens de Lagrange est donné par :*

$$(\mathcal{D}) \qquad d^* = \max_{y \in \mathbb{R}^m} b^T y : c - \sum_{i=1}^{m} y_i a_i \in K^*,$$

où $\mathbb{K}^*$ est le cône dual de $\mathbb{K}$.

Applications : cas des programmes linéaires coniques spéciaux.

2. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}^n_+$, est l'orthant positif de $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel $x \bullet y = x^T y$,alors dans ce cas $K = K^*$.Déduire le programe linéaire primal et son dual.*

3. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{S}^n_+$,est le cône des matrices symétriques semi-définies positives de $\mathbb{E} = \mathbb{S}^n$ muni d'un produit scalaire trace $X \bullet Y = \boldsymbol{Tr}(XY)$. Déduire le pair de la programmation semidéfinie.*

4. *Même travail pour le cas du cône de Lorentz i.e., $K = \mathcal{L}^{n+1}$.*

Exercice 2 *(Dualité conique)*

1- Donner les thèorèmes de dualité faible et forte pour un PLC. Citer les conditions de solvabilité de PLC.

2- Supposons que la condition de dualité forte d'un PLC est satisfaite. Donner donc le système des conditions d'optimalité qui caractérisent une solution optimale primale $(\mathcal{P})$ et duale $(\mathcal{D})$ du programme PLC.

3- Application de (2) à la programmation linéaire (PL), semi-définie (PSD) et de Lorentz $(PCDO)$.

Exercice 3 *Considérons le problème $\mathcal{PSD}$ primal suivant :*

$$(\mathcal{P}) \ : \quad p^* = \min \ \ Tr(CX) \ \ \text{sujet à : } Tr(A_i X) = b_i, = 1, 2, \ \ X_i \succeq 0,$$

où

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} ,b \ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer le dual $(\mathcal{D})$ de $(\mathcal{P})$.*

12.*Montrer que les deux problèmes sont réalisables et bornés.*

3. *Montrer que $p^* = 0$ et $d^* = -1$.*

4. *Déduire que ce problème n'est pas solvable (dualité forte).*

Exercice 4 *Considérons le $\mathcal{PCSO}$ suivant :*

$$(\mathcal{P}) \ : \quad p^* = \inf \ x_2 \text{ sujet à : } x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \ x_2 + x_4 = 1, \ x \in \mathcal{L}^3 \times \mathcal{L}^2.$$

1. *Montrer que $(\mathcal{P})$ n'est pas résoluble (solvable).*
2. *Représenter graphiquement la région de sa faisabilié.*
3. *Calculer le dual $(\mathcal{D})$ de $(\mathcal{P})$.*
4. *Vérifier les conditions du théorème de dualité.*
5. *Décider si le dual problem $\mathcal{D}$ est solvable. Si oui trouver la solution.*
6. *Trouver la valeur optimale du dual et primal problème. Conclure.*

Exercice 5 *Considérons l'ensemble $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{R}^4$ donné par :*

$$\mathbb{K} = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \ x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2, \ x_3, \ x_4 \geq 0 \right\}.$$

1- *Montrer que $\mathbb{K}$ est un cône propre auto-duale.*
2- *Soit le problème primal linéaire conique sous forme standard :*

$$\begin{array}{lrcl} (\mathcal{P}) & p^* & = & \min -x_1 \\ & & & s.c. \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x \in \mathbb{K}. \end{array} \right. \end{array}$$

a) *Montrer que le problème $\mathcal{P}$ est solvable.*
b) *Calculer le duale $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$. Montrer $\mathcal{D}$ est solvable.*
c) *Déduire.*

Exercice 6 *Considérons l'ensemble suivant :*

$$\mathcal{L}_r^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : 2x_1 x_2 \geq \sum_{i=2}^{n} x_i^2, \ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$$

Montrer que $\mathcal{L}_r^n$ est un cône propre auto-duale de $\mathbb{R}^n$. (Indication : considérons la transformation orthogonale suivante :

$$T_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{n-2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{n-2}} \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{n-2}} & \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{n-2}} & I_{n-2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

avec I_{n-2} désigne la matrice identité d'ordre $n-2$, et les zéros $\in \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{n-2}}$ et on vérifie facilement que :

$$x \in \mathcal{L}^n \Leftrightarrow T_n x \in \mathcal{L}_r^n.$$

Exercice 7 *Modélisation de quelques problèmes comme $\mathcal{PCSO}$. Considérons le problème d'optimisation suivant :*

$$(\mathcal{P}) \quad p^* = \min \|x\|_2 \ \ s.\grave{a} \quad Ax = b,$$

où $A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ b \in R^m$ *et* $x \in \mathbb{R}^n$.

1- Formuler le problème $\mathcal{P}$ *comme un programme conique de deuxième ordre* $\mathcal{PCSO}$.

2- Donner son dual $(\mathcal{D})$.

3- Supposons que ce problème est solvable, donner donc les conditions d'optimalité. Exemple prenons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}^4.$$

Exercice 8 *Considérons le problème d'optimisation quadratique sous contraintes quadratiques suivant :*

$$\mathcal{PQC} \ : \quad p^* = \inf \frac{1}{2}x^T Q_0 x \ + c^T x + d \quad \textit{sujet à :}\ \frac{1}{2}x^T Q_1 x \ + c_1^T x + d_1 \leq 0,$$

où toutes les matrices Q_0 *et* Q_1 *sont symétriques et semi-définies* ($Q_i \succeq 0, i = 0,1$). *En utilisant la décomposition de Cholesky,*

$$Q_i = L_i L_i^T, i = 0,1$$

on montre que $\mathcal{PQC}$ *est équivalent à* $\mathcal{PCSO}$ *suivant :*

$$\mathcal{PCSO} \quad p^* = \inf t_0 + c_0^T r + d_0,\ \textit{sujet à :} t_1 + c_1^T r + d_1 = 0, (t_i, 1, L_i x) \in \mathcal{L}_r^{n_i+2},\ i = 0,1.$$