

Université Ferhat ABBAS, Sétif 1
Faculté des Sciences – Département de Mathématiques
Analyse Complexe – LMD S4 (2019-2020)

TD 1. Opérations sur le corps des complexes

1. Trouver les parties réelles et imaginaires de chacun des nombres complexes suivants :

(a) $(2 + 5i)/(4 + 2i)$ (b) $(1 + i\sqrt{3})^6$ (c) $(1 + i)^n, n \in \mathbb{N}$

2. Trouver toutes les solutions des équations suivantes et puis préciser leurs répartitions dans le plan complexe.

(a) $5z^2 + 4z + 1 = 0$ (b) $z^4 - z^2 - 2 = 0$ (c) $z^5 = -32$

3. Étant donné $(2 + i)(3 + i)$, montrer que $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3}$.

4. Utiliser le formule de Moiver pour prouver les propriétés suivantes :

(a) $\cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$

(b) $\frac{\sin 5\theta}{\sin \theta} = 16 \cos^4 \theta - 12 \cos^2 \theta + 1, \theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

5. Prouver les propriétés suivantes :

(a) $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(b) Si $\text{Im } z > 0$ alors $\text{Im} \left(\frac{z}{1 + z^2} \right) > 0$ si et seulement si $|z| < 1$.

6. Illustrer géométriquement les ensembles suivants dans le plan complexe et identifier parmi eux les ensembles ouverts, fermés, bornés et connexes.

(a) $\text{Im } z^2 < 2$ (d) $\text{Re}(1/z) = \frac{1}{4}$ (g) $\text{Im}(z - i) \geq 3$

(b) $|1 + z| = 2|1 - z|$ (e) $\left| \frac{z - 3}{z + 3} \right| < 2$ (h) $|z - i| = |z + i|$

(c) $|z| + \text{Re } z < 1$ (f) $2 \leq |z - 1 + i| < 3$ (i) $|z - i| + |z + i| = 3$

7. Écrire $\arctan z$ en fonction $\ln z$ puis déduire la forme algébrique de $\arctan(1 + i)$.

8. (a) Si $z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi$. Montrer que la détermination principale de la fonction multiforme $f(z) = z^i$ est donnée par : $e^{-\theta} [\cos(\ln r) + i \sin(\ln r)]$.

(b) Si $|z| = 1$, montrer que $f(z) = z^i$ représente une infinité de nombres réels, puis donner la détermination principale de $f(z)$.