

Séries d'exercices n°2  
Séries de entières

**Exercice 1**

I) 1. Calculer le rayon de convergence des séries entières définies comme suit

$$1^{(*)}. \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n, 2. \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n, 3. \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-1} x^n,$$

$$4^{(*)}. \sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n, 5. \sum_{n=0}^{+\infty} n! x^{n^2}, 6. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{\cosh n}$$

2. Faire l'étude aux bornes de l'intervalle de convergence pour chaque série.

II) Déduire le domaine de convergence de

$$1. \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (x-3)^n, 2. \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-1} (2x-1)^n$$

**Exercice 2**

Calculer les sommes des séries entières suivantes

$$1^{(*)}. \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n, 2. \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n, 3. \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-1} x^n,$$

$$4^{(*)}. \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cosh n}{n!} x^{2n}, 5. \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sinh n}{(2n)!} x^{2n}, 6. \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

**Exercice 3**

Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 4n + 1}{n!} x^n$$

**Exercice 4**

Développer en série entière les fonctions suivantes

$$1. x \longmapsto \frac{1}{(2x+3)^2}, 2. x \longmapsto e^{\cos x}, 3^{(*)}. x \longmapsto (1+x)^x,$$

$$4^{(*)}. x \longmapsto \tan x, 5. x \longmapsto \ln \cos x,$$

**Exercice 5**

Trouver la solution de l'équation différentielle

$$y'' - 2xy' - 4y = 0$$

vérifiant les conditions  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$

**NB. Les questions mentionnées par (\*) seront laissées aux étudiants.**