Université Ferhat Abbas-Sétif1 Année 2019-2020
Faculté des Sciences L2-Mathématiques
Département de Mathématiques Analyse 3

Séries d'exercices n°2
Suites et Séries de Fonctions

Exercice 1
On considère pour $n \geq 1$, les fonctions :
1) $f_n(x) = x - \frac{1}{n}$, $x \in IR$.
2) $g_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x$, $x \in IR$,
3) $h_n(x) = x \exp(-nx)$, $x \in [0, +\infty[$
4) $\phi_n(x) = nx \exp(-nx)$, $x \in [0, +\infty[$
Etudier la convergence simple et uniforme de ces suites de fonctions.
Exercice 2
Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions défines par $f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx}}$, $n \in IN$.
1. Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que la convergence n'est pas uniforme $[0, +\infty[$.
3. Montrer que la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
Exercice 3
On considère la suite de fonctions de $I = [0, +\infty[$ dans IR définie par

$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{n+x}{1+nx}\right)$$

1) Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$ sur I.
2) Pour tout entier $n \geq 0$ on pose :

$$\forall x \in I : g_n(x) = f_n(x) + \arctan x - \frac{\pi}{2}$$

- Montrer que pour tout $n \geq 0$, g_n est une fonction croissante sur I.
- En déduire que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur I.
Exercice 4
Etudier la convergence de la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$$

1. La convergence est-elle simple? uniforme?
2. En déduire la nature de la suite numérique $(u_n)_n$ telle que

$$u_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} dx$$

Exercice 5

Etudier la convergence **simple**, **uniforme** et **normale** des séries de fonctions $\sum_n u_n$ définies sur $[0,1]$ dans chacun des cas suivants :

1. $u_n(x) = \dfrac{1}{n + xn^2}$, 2. $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{nx + \sqrt{n}}$, 3. $u_n(x) = x^n (1-x)$,

4. $u_n(x) = (-1)^n (1-x) x^n$, 5. $u_n(x) = \dfrac{\arctan nx}{n^2}$

Exercice 6

On considère la série de fonctions : $\sum_n f_n$ telle que $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2}$, $x \in IR$.

1. Etudier la convergence simple de $\sum_n f_n$.

2. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_n$ de réels telle que la suite numérique de terme général $f_n(a_n)$ ne converge pas vers 0.

3. $\sum_n f_n$ est-elle uniformément convergente ?

Exercice 7

Soit $t \in IR$. On pose $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^t}$ lorsque la série est convergente.

Montrer que la fonction f est définie continue et dérivable dans l'intervalle $]1, +\infty[$.