Université Ferhat Abbas-Sétif1
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2019-2020
L2-Mathématiques
Analyse 3

Séries d'exercices n°1
Séries numériques

Exercice 1
Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ une série numérique et $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ sa somme partielle d'ordre n.
1. Si $\sum_{n\geq 1} a_n = 2$, donner $\lim_{n\longrightarrow +\infty} a_n$ et $\lim_{n\longrightarrow +\infty} S_n$.
2. Si $\lim_{n\longrightarrow +\infty} S_n = 3$, donner $\lim_{n\longrightarrow +\infty} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} a_n$.
3. Calculer la somme partielle d'ordre 4, dans les deux cas suivants :

$$a_n = \frac{2}{n+2} \text{ et } a_n = \frac{1}{n^2+1}$$

Exercice 2
Trouver le terme général u_n de la série dont la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est définie pour tout $n \geq 1$, par

$$1.\ S_n = \frac{n(n+1)}{2},\ 2.\ S_n = (-1)^n,\ 3.\ S_n = \frac{2^n - 1}{2^n},\ 4.\ S_n = \arctan n$$

Exercice 3
En utilisant le test de divergence, déterminer les séries qui sont divergentes parmi les séries suivantes

$$1.\ \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n n^2}{3n^2+2n+1},\ 2.\ \sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n},\ 3.\ \sum_{n\geq 1} \cos\frac{1}{n^2},\ 4.\ \sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 4
Transformer les séries suivantes pour qu'elles débutent par l'indice $n = 1$.

$$1.\ \sum_{n\geq 2} \frac{n^2}{2^n},\ 2.\ \sum_{n\geq 4} \frac{n^2-n}{(n+5)^2},\ 3.\ \sum_{n\geq 0} \frac{n\sin n}{(n+2)^3}$$

Exercice 5
Calculer les sommes des séries convergentes suivantes

$$1.\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)},\ 2.\ \sum_{n\geq 2} \sin\frac{\pi n!}{120}$$

Exercice 6
En utilisant une série numérique, écrire sous forme de fraction rationnelle chacun des nombres :

$$a = 0,777..., \; b = 0,121212..., \; c = 0.12474747...., \; d = 5,12474747....$$

Exercice 7
En utilisant le critère de comparaison, étudier la nature des séries suivantes
:

$$1.\ \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2+3},\ 2.\ \sum_{n\geq 2} \frac{n}{\sqrt{4n+5}},\ 3.\ \sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n}\ ,\ 4.\ \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln n},\ 5.\ \sum_{n\geq 1} \left(\frac{\cos n}{n}\right)^2$$

Exercice 8
Utiliser le critère de l'intégrale pour étudier la nature des séries suivantes :

$$1.\ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+1},\ 2.\ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt[3]{n+3}},\ 3.\ \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}$$

Exercice 9
Utiliser la règle de Cauchy pour étudier la nature des séries suivantes :

$$1.\ \sum_{n\geq 1} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+2}\right)^n,\ 2.\ \sum_{n\geq 1} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\ ,\ 3.\ \sum_{n\geq 2} \frac{n}{(\ln n)^n}$$

Exercice 10
Utiliser la règle de D'Alembert pour étudier la nature des séries suivantes :

$$1.\ \sum_{n\geq 1} \frac{2^n+5}{3^n},\ 2.\ \sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!},\ 3.\ \sum_{n\geq 2} \frac{n3^n}{n+2},\ 4.\ \sum_{n\geq 2} \frac{n^n}{n!}$$

Exercice 11
Etudier les séries alternées suivantes :

$$1.\ \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^4+7},\ 2.\ \sum_{n\geq 1} \frac{(-2)^n}{3^n},\ 3.\ \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}\ \frac{n-1}{n},\ 4.\ \sum_{n\geq 2} \frac{(-n)^n}{n^{3n}},\ 5.\ \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}\ \frac{n^2}{n^3+1}$$