Université Ferhat Abbas Sétif 1
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année Universitaire 2019/2020
LMD Science de la Matière
$1^{ère}$ Année Semestre1

Examen de Mathématiques 1

Durée : 01h30mn

Exercice 1 (5pts)

I Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit l'application $f(x) = |x|$

Soient $A = [-2, 0]$, $B = [0, 1]$, calculer $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.

II Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 3^{2n+1} + 2^{n+2} \text{ est divisible par } 7$$

III Résoudre l'équation

$$ch(x) = 2$$

Exercice 2 (5pts)

I On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + b & \text{si } x < 2, \\ a & \text{si } x = 2, \\ bx^2 + 2x + 5 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

1- Déterminer a et b pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2- Etudier la dérivabilité de f en point 2.

II Déterminer l'ensemble E des points ou la fonction $g(x) = \arctan\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$ est dérivable, et pour tout $x \in E$, exprimer $g'(x)$.

Exercice 3 (3pts)

Soit $\mathbb{G} = \mathbb{R}$, on définit sur $\mathbb{G}$ une loi de composition intérne notée $*$ par

$$\forall a,\ b \in \mathbb{G} \quad a * b = a + b + \frac{1}{6}$$

1-Montrer que $(\mathbb{G}, *)$ est un groupe commutative.

2-Soit $H = \left\{\dfrac{2n-1}{6} \backslash \quad n \in \mathbb{Z}\right\}$. Vérifier que $(H, *)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{G}, *)$.

Exercice 4 (7pts)

I Soit l'ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ z - 2x = 0\}$

1- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2-Donner une base de E.

3- Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que le vecteur $(1, -1, \alpha) \in E$.

II Soit l'application linéaire f définie par

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\to f(x, y, z) = z - 2x \end{aligned}$$

1- Déterminer $Ker(f)$. L'application f est-elle injective ?

2- Déduire $rg(f)$.

3- Déduire que l'application f est surjective.

Bonne chance

Université Farhat Abbas Sétif 1
Faculté des sciences
Département de physique
Le 26/01/2020

Corrigé de l'examen de Math 01

EXO 2 :

I- On a $A=[-2,0]$, $f(A)=\{f(x) \mid x\in A\}$

$= f([-2,0])$

$=[f(0), f(-2)]$

(Car f est décroissante sur $[-2,0]$)

donc $f(A)=[0,2]$ — 0,5

On a $B=[0,1]$, $f^{-1}(B)=\{x\in\mathbb{R} \setminus f(x)\in B\}$

$=\{x\in\mathbb{R}\setminus f(x)\in[0,1]\}=[-1,1]$ 0,5

II- 1) pour $n=0$, On a $3^{2(0)+1}+2^{0+1}=3+4=7$ est divisible par 7. 0,25

2) supposons que la propriété est vraie pour n c-à-d :

$\exists K\in\mathbb{Z}$ tq : $3^{2n+1}+2^{n+2}=7K$. 0,25

3) Montrons qu'elle reste vraie à l'ordre $n+1$

En effet : $3^{2(n+1)+1}+2^{n+1+2}$

$=(7+2)\,3^{2n+1}+2\cdot 2^{n+2}=2\left(3^{2n+1}+2^{n+2}\right)+7\cdot 3^{2n+1}$

$=$

Université Farhat Abbas Sétif 1
Faculté des sciences
Département de physique Le 26/01/2020

Corrigé de l'examen de Math 01

EXO 1 :

I– On a $A=[-2,0]$, $f(A)=\{f(x) \setminus x\in A\}$.

$= f([-2,0])$.

$=[f(0), f(-2)]$.

(Car f est décroissante sur $[-2,0]$)

donc $f(A)=[0,2]$ — 0,5

On a $B=[0,1]$, $f^{-1}(B)=\{x\in \mathbb{R} \setminus f(x)\in B\}$.

$=\{x\in\mathbb{R}\setminus f(x)\in[0,1]\}=[-1,1]$ 0,5

II– 1) pour $n=0$, on a $3^{2(0)+1}+2^{0+1}=3+4=7$ est divisible par 7. 0,25

2) supposons que la propriété est vraie pour n c-à-d :

$\exists K\in\mathbb{Z}$ tq : $3^{2n+1}+2^{n+2}=7K$. 0,25

3) Montrons qu'elle reste vraie à l'ordre $n+1$

en effet : $3^{2(n+1)+1}+2^{n+1+2}$

$=(7+2)\,3^{2n+1}+2\cdot 2^{n+2}=2\left(3^{2n+1}+2^{n+2}\right)+7\cdot 3^{2n+1}$

$=$

en effet :

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 9 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2}$$

$$= (7+2)\, 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2}$$

$$= 2\left[3^{2n+1} + 2^{n+2}\right] + 7 \cdot 3^{2n+1}$$

2

$$= 2 \cdot 7k + 7 \cdot 3^{2n+1}.$$

$$= 7k', \quad k' = 2k + 3^{2n+1}$$

donc $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

III - On résoudre l'équation $ch(x) = 2$.

utilisant la définition de la fonction Cosinus hyperbolique :

$$ch(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$ 0,25

On sait que :

$ch(x) = 2 \Leftrightarrow e^{x} + e^{-x} - 4 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} + 1 - 4e^{x} = 0$

La fonction exponentielle ne s'annulant jamais, l'équation est équivalant à : $e^{2x} - 4e^{x} + 1 = 0.$ 0,25

On pose $X = e^{x}$, et on résoud :

0,25

$X^2 - 4X + 1 = 0$ ses racines sont $2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$ qui sont tous les deux des réels positifs.

les solutions de l'équation sont 0,25

donc : $\ln(2-\sqrt{3})$ et $\ln(2+\sqrt{3})$ 0,5

Exo2 :

1) sf les restriction de f aux intervalles $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$ sont des polynômes donc continues sur ces des deux intervalles (0,5)

- La fonction f sera continue sur $\mathbb{R}$.
$\Longleftrightarrow$ elle est continue en pt 2.
ie : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = f(2) = a$ (0,5)

en effet : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} (x^2 + x + b) = b + 6$.

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} (bx^2 + 2x + 5) = 4b + 9$ (1)

alors $b + 6 = 4b + 9 = a \Rightarrow \boxed{b = -1}$ et $\boxed{a = 5}$

2) on étudie la dérivabilité de f en 2.
calculons : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ et $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

en effet :
$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} \dfrac{x^2 + x - 1 - 5}{x - 2} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}} = 5 = f'_g(2)$ (0,5)

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \dfrac{-x^2 + 2x + 5 - 5}{x - 2} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \dfrac{-x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = -2 = f'_d(2)$ (0,5)

comme $f'_g(2) \neq f'_d(2)$ alors f n'est pas dérivable en pt 2. (0,5)

II\ g est la composée des fonctions $x \to \mathrm{Arctg}\, x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \to \dfrac{x-1}{x+2}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ 0,25 0,25

alors g est dérivable sur :

$E = \mathbb{R} - \{-2\}$ 0,5

pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ on a :

$$g'(x) = \left(\frac{x-1}{x+2}\right)' \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2} = \frac{3}{2x^2+2x+5}$$ 0,5

EXO3

1) $(G, *)$ est un groupe commutative :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ donc $a+b+\frac{1}{6} \in \mathbb{R}$.

donc $*$ interne.

$*$ Commutative car : 0,5

$a * b = a + b + \frac{1}{6} = b + a + \frac{1}{6} = b * a$.

$*$ associative car : 0,5

$(a * b) * c = \left(a * b + \frac{1}{6}\right) * c = a + b + \frac{1}{6} + c + \frac{1}{6}$

$= a + \left(b + c + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} = a + (b * c) + \frac{1}{6}$

$= a * (b * c)$.

$\forall a \in \mathbb{R}\,;\ \exists e \in \mathbb{R} \setminus a * e = a \Leftrightarrow a + e + \frac{1}{6} = a$

$\Leftrightarrow \boxed{e = -\frac{1}{6}}$ 0,5

$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists a' \in \mathbb{R} \setminus a * a' = e.$

$a \star a' = e \Leftrightarrow a + a' + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow \boxed{a' = \frac{-1}{3} - a}$

0,5

2) $(H, \star)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, \star)$ car

• $\exists n = 0 \in \mathbb{Z}$ tq: $\frac{2(0)-1}{6} = \frac{-1}{6} \in H$.

alors $H \neq \emptyset$.

0,25

• soient $x, y \in H$, on a:

$\exists n_1 \in \mathbb{Z}$ tq: $x = \frac{2n_1 - 1}{6}$, $\exists n_2 \in \mathbb{Z}$ tq:

$y = \frac{2n_2 - 1}{6}$.

en effet: $x \star y = x + y + \frac{1}{6} = \frac{2n_1 - 1}{6} + \frac{2n_2 - 1}{6} + \frac{1}{6}$

$= \frac{2(n_1 + n_2) - 1}{6}$ alors $\exists n = (n_1 + n_2) \in \mathbb{Z}$ tq: $x \star y = \frac{2n-1}{6}$

$x \star y \in H$.

0,5

• Soit $x \in H \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$ tq: $x = \frac{2n-1}{6}$.

$sym(x) = x^{-1} = -\frac{1}{3} - x = -\frac{1}{3} - \frac{2n-1}{6}$

$x^{-1} = \frac{2(-n-1) - 1}{6} \Rightarrow \exists n_1 = -n-1 \in \mathbb{Z}$ tq:

$x^{-1} = \frac{2n_1 - 1}{6} \Rightarrow x^{-1} \in H$.

0,25

——— o ———

Ex04 :

I\ soit $E = \{(x,y,z) \in IR^3 \setminus z - 2x = 0\}$.

1\ E est un sous-espace v de IR^3 puis que.

i\ $0_{IR^3} \overset{?}{\in} E$ On a $0_{IR^3} = (0,0,0)$ avec : $0 - 2(0) = 0$

donc $0_{IR^3} \in E$. 0,5

ii\ soient $u, v \in E$, $u+v \overset{?}{\in} E$

$u = (x,y,z) \in E \Rightarrow z - 2x = 0$.

$v = (x',y',z') \in E \Rightarrow z' - 2x' = 0$.

$u + v = (x+x', y+y', z+z')$.

en effet : $(z+z') - 2(x+x') = z + z' - 2x - 2x'$

$= \underbrace{z - 2x}_{=0} + \underbrace{z' - 2x'}_{=0} = 0 \Rightarrow u + v \in E$. 0,5

iii\ soit $u \in E$, $\lambda \in IR$, $\lambda u \overset{?}{\in} E$

$u = (x,y,z) \in E \Rightarrow z - 2x = 0$.

$\lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

en effet : $(\lambda z) - 3(\lambda x) = \lambda[\underbrace{z - 3x}_{=0}] = 0$.

$\Rightarrow \lambda u \in E$. 0,5

2\ La base de E :

$E = \{(x,y,z) \in IR^3 \setminus z = 2x\}$.

$= \{(x, y, 2x) \setminus x, y \in IR\}$.

$E = \{(x, 0, 2x) + (0, y, 0) \setminus x, y \in \mathbb{R}\}$.

$E = \text{vect}\{\underbrace{(1, 0, 2)}_{v_1}, \underbrace{(0, 1, 0)}_{v_2}\}$. 0,5

soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq: $\sum_{i=1}^{2} \lambda_i v_i = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$\lambda_1(1, 0, 2) + \lambda_2(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$.

$(\lambda_1, \lambda_2, 2\lambda_1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \end{cases}$ 0,5

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

alors v_1, v_2 sont independants.

donc $B_1 = \{v_1, v_2\}$ est une base de E. 0,25

3) $(1, -1, \alpha) \in E \Rightarrow \alpha - 2(1) = 0$.

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$ 0,5

II - $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$(x, y, z) \longrightarrow f(x, y, z) = z - 2x$.

1)

$\ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}}\}$.

$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus z - 2x = 0\} = E$ 0,5

comme $\ker f = E \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. alors f n'est pas injective. 0,5

2) $\text{rg}(f) = \dim \text{Im} f$. 0,25

d'apres le thm du rang on a :

$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f$ 0,25

et comme B_1 est une base de $E = \ker f$

alors $\dim \ker f = 2$ 0,25

donc $\dim \operatorname{Im} f = 3 - 2 = 1$. 0,5

3) On a par définition de $\operatorname{Im} f$ que

$\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}$ 0,25 et d'autre par on a :

$\dim \operatorname{Im} f = 1 = \dim \mathbb{R}$. 0,25

Alors $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$. 0,25

donc f est surjective. 0,5