M. CHOUGUI NADHIR. | SERIE N°3 (Solutions) |

Exo1 : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$. $x=(x_1,\dots,x_n), y=(y_1,\dots,y_n), z=(z_1,\dots,z_n)$.

1) A) a) $d_1(x,y)=0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=0 \Longleftrightarrow |x_i-y_i|=0, \forall 1\leq i\leq n$

$\Longleftrightarrow x_i=y_i, \forall 1\leq i\leq n \Longleftrightarrow (x_1,\dots,x_n)=(y_1,\dots,y_n)$

$\Longleftrightarrow x=y.$

b) $d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=\sum_{i=1}^{n}|-(y_i-x_i)|=\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|=d_1(y,x).$

c) $d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i+z_i-y_i|\leq\sum_{i=1}^{n}(|x_i-z_i|+|z_i-y_i|)$

$=\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|+\sum_{i=1}^{n}|z_i-y_i|=d_1(x,z)+d_1(z,y).$

D'après a), b) et c) on conclut que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

B) a) $d_\infty(x,y)=0 \Longleftrightarrow \sup_{1\leq i\leq n}(|x_i-y_i|)=0 \Longleftrightarrow |x_i-y_i|=0, \forall 1\leq i\leq n$

$\Longleftrightarrow x_i=y_i, \forall 1\leq i\leq n$

$\Longleftrightarrow x=y.$

b) $d_\infty(x,y)=\sup_{1\leq i\leq n}(|x_i-y_i|)=\sup(|-(y_i-x_i)|)=\sup(|y_i-x_i|)=d_\infty(y,x)$

c) $d_\infty(x,y)=\sup_{1\leq i\leq n}(|x_i-y_i|)=\sup_{1\leq i\leq n}(|x_i-z_i+z_i-y_i|)\leq\sup(|x_i-z_i|+|z_i-y_i|)$

$\leq\sup(|x_i-z_i|)+\sup(|z_i-y_i|)=d_\infty(x,z)+d_\infty(z,y).$

D'après a), b) et c) on conclut que d_∞ est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

2) $\forall f, g, h \in C[a,b]$.

A) a) $d_1(f,g)=0 \Longleftrightarrow \int_a^b|f(t)-g(t)|dt=0 \Longleftrightarrow |f(t)-g(t)|=0, \forall t\in[a,b]$

$\Longleftrightarrow f(t)=g(t), \forall t\in[a,b]$

$\Longleftrightarrow f\equiv g$

b) $d_1(f,g)=\int_a^b|f(t)-g(t)|dt=\int_a^b|-(g(t)-f(t))|dt$

$=\int_a^b|g(t)-f(t)|dt=d_1(g,f).$

c) $d_1(f,g)=\int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt=\int_a^b |f(t)-h(t)+h(t)-g(t)|\,dt$

$\leqslant \int_a^b \left(|f(t)-h(t)|+|h(t)-g(t)|\right)dt=\int_a^b |f(t)-h(t)|\,dt+\int_a^b |h(t)-g(t)|\,dt$

$= d_1(f,h)+d_1(h,g).$

D'après a), b) et c) on conclut que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

B) a) $d_\infty(f,g)=0 \Leftrightarrow \sup_{t\in[a,b]}\left(|f(t)-g(t)|\right)=0 \Leftrightarrow |f(t)-g(t)|=0,\ \forall t\in[a,b]$

$\Leftrightarrow f(t)=g(t),\ \forall t\in[a,b]$

$\Leftrightarrow f\equiv g.$

b) $d_\infty(f,g)=\sup_{t\in[a,b]}\left(|f(t)-g(t)|\right)=\sup_{t\in[a,b]}\left(|-(g(t)-f(t))|\right)$

$=\sup\left(|g(t)-f(t)|\right)$

$=d_\infty(g,f).$

c) $d_\infty(f,g)=\sup\left(|f(t)-g(t)|\right)=\sup\left(|f(t)-h(t)+h(t)-g(t)|\right)$

$\leqslant \sup\left(|f(t)-h(t)|+|h(t)-g(t)|\right)\leqslant \sup\left(|f(t)-h(t)|\right)+\sup\left(|h(t)-g(t)|\right)$

$= d_\infty(f,h)+d_\infty(h,g).$

D'après a), b), c) on conclut que d_∞ est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

EXO2 : $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x+y)\leqslant f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}_+ \quad \text{----}(*) \end{cases}$

1) On a : $X\times X \xrightarrow{d} \mathbb{R}_+ \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

a) $\forall x,y\in X,\ d_1(x,y)=(f\circ d)(x,y)=0 \Leftrightarrow f(d(x,y))=0 \Leftrightarrow d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y.$

$\cancel{b)\ \forall x,y\in X,\ (f\circ d)(x,y)=f(d(x,y))=f(d(y,x}$

b) $\forall x,y\in X,\ d_1(x,y)=(f\circ d)(x,y)=f(d(x,y))=f(d(y,x))=(f\circ d)(y,x)$

$=d_1(y,x).$

c) $\forall x,y,z\in X,\ d_1(x,y)=(f\circ d)(x,y)=f(d(x,y))$ et puisque

$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$ et f est croissante on obtient

$d_1(x,y)\leqslant f(d(x,z)+d(z,y))\leqslant f(d(x,z))+f(d(z,y))$ (D'après $(*)$)

$=d_1(x,z)+d_1(z,y).$

D'après a), b), c) on conclut que d_1 est une distance sur X.

M. CHOUGUI NADHIR

2) • $d_2 = \dfrac{d}{1+d}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$. On remarque que :

$$\forall x, y \in X : (f\circ d)(x,y) = f(d(x,y)) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = d_2(x,y).$$

D'autre part on a : $f(0) = 0$ et $f(x+y) = \dfrac{x+y}{1+x+y} = \dfrac{x}{1+x+y} + \dfrac{y}{1+x+y}$
$\leqslant \dfrac{x}{1+x} + \dfrac{y}{1+y} = f(x) + f(y)$.

et donc f verifie les deux conditions de la question 1)
ce qui montre que $d_2 = f\circ d$ est une distance sur X.

• $d_3 = \inf(1, d)$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$
définie par $f(x) = \inf(1, x)$. On remarque que :
$\forall x, y \in X : (f\circ d)(x,y) = f(d(x,y)) = \inf(1, d(x,y)) = d_3(x,y)$.
D'autre part on a : $f(0) = \inf(1,0) = 0$ et $f(x+y) = \inf(1, x+y)$
$\leqslant \inf(1,x) + \inf(1,y) = f(x) + f(y)$.
et donc f verifie les deux conditions de la question 1)
ce qui montre que $d_3 = f\circ d$ est une distance sur X.

M. CHOUGUI NADHIR

M. CHOUGUI NADHIR

Exo3 : $\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$

1) a) $\delta(x,y) = 0 \iff x = y$ par définition.

b) $\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } y \neq x \\ 0 & \text{si } y = x \end{cases} = d(y,x)$.

c) $\delta(x,y) \overset{?}{\leqslant} \delta(x,z) + \delta(z,y)$, $\forall x,y,z \in X$

- Si $\delta(x,z) = 1$ ou bien $\delta(z,y) = 1$, alors $\delta(x,y) \leqslant \delta(x,z) + \delta(z,y)$ car $\delta(x,y) \leqslant 1$.
- Si $\delta(x,z) = \delta(z,y) = 0$ alors $x = y = z$ et donc :
  $0 = \delta(x,y) \leqslant \delta(x,z) + \delta(z,y) = 0$.

D'après a), b) et c) on conclut que δ est une distance sur X.

2) Par définition : $B(x_0,r) = \{x \in X : \delta(x_0,x) < r\}$.

- Si $r > 1$, alors $\delta(x_0,x) < r$ pour tout $x \in X$ car $\delta(x_0,x) \leqslant 1$ d'où $B(x_0,r) = X$.
- Si $r \leqslant 1$, alors $\delta(x_0,x) < r \leqslant 1$ et donc $\delta(x_0,x) = 0$ d'où $x = x_0$ ce qui montre que $B(x_0,r) = \{x_0\}$.

Exo4 : 1) $\Rightarrow$ 2) ~~Supposons que x est un point d'accumulation de A~~

Supposons que V_x contient un nombre fini de points $\{a_1, \dots, a_n\}$ de A. Soit $r = \inf\{d(x,a_i) : i = 1, \dots, n\}$, alors $V_x \cap B(x, \frac{r}{2})$ est un voisinage de x qui ne contient aucun point de A différent de x. Donc x n'est pas un point d'accumulation de A.

2) $\Rightarrow$ 3) Supposons que tout voisinage V_x de x contient une infinité de points de A, alors $(V_x - \{x\}) \cap A \neq \phi$ et donc $V_x \cap (A - \{x\}) \neq \phi$ d'où $x \in Adh(A - \{x\})$.

3) $\Rightarrow$ 1) Supposons que $x \in Adh(A-\{x\})$, alors, pour tout $V_x \in \mathcal{V}(x)$

On a : $V_x \cap (A-\{x\}) \neq \emptyset$ et donc pour tout $V_x \in \mathcal{V}(x)$ on a :

$(V_x - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ d'où $x \in A'$.

Exo5 : Il suffit de le montrer pour deux ouverts denses. Soient D_1 et D_2 deux ouverts denses de X. D'une part, il est claire que $D = D_1 \cap D_2$ est un ouvert de X. D'autre part, puisque D_1 est dense dans X alors pour tout $x \in X$ et $r > 0$ on a : $A = B(x,r) \cap D_1 \neq \emptyset$. On remarque que A est un ouvert non vide de X ce qui entraîne que $A \cap D_2 \neq \emptyset$ Car D_2 est dense dans X. Mais $A \cap D_2 = B(x,r) \cap (D_1 \cap D_2) \neq \emptyset$ ce qui montre que $D = D_1 \cap D_2$ est un ouvert dense dans X.

Exo6 : $Adh(A) \overset{?}{=} \{x \in X : d(x,A) = 0\}$. Soit $B = \{x \in X : d(x,A) = 0\}$.

- $Adh(A) \overset{?}{\subset} \{x \in X : d(x,A) = 0\} = B$

~~Soit $x \notin \{x \in X : d(x,A) = 0\}$, alors~~

Soit $a \notin B$, alors $d(a,A) = r > 0$ et donc la boule ouverte $B(a, \frac{r}{2})$ de centre a et de rayon $\frac{r}{2}$ ne contient aucun point de A c-à-d. $B(a, \frac{r}{2}) \cap A = \emptyset$ d'où $a \notin Adh(A)$.

- $B \overset{?}{\subset} Adh(A)$.

~~Supposons Soit $a \in B$, alors $d(a,A) = 0$. Donc,~~

Soit $a \notin Adh(A)$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \cap A = \emptyset$ d'où on obtient : $\forall b \in A,\ d(a,b) \geq r$ ce qui montre que $d(a,A) = \inf_{b \in A} d(a,b) \geq r > 0$ et donc $d(a,A) \neq 0$ c-à-d $a \notin B$.

Exo7 1) $diam(A) \overset{?}{=} diam(Adh A)$

- $diam(A) \overset{?}{\leq} diam(Adh A)$

~~On a~~ :

M. CHOUGI NADHIR

On a : $A \subseteq Adh(A)$ donc $diam(A) \leq diam(Adh(A))$ ...(*)

• $diam(AdhA) \overset{?}{\leq} Adh(A)$

Si $x, y \in Adh(A)$, alors il existent (x_n) et (y_n) deux suites d'élement de A telles que : $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow y$. Donc, il existent x' et y' deux éléments de A tels que : pour tout $\varepsilon > 0$: $d(x, x') < \varepsilon$ et $d(y, y') < \varepsilon$ d'où :

$$d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y') + d(y',y) \leq d(x',y') + 2\varepsilon.$$

Donc : $diam(AdhA) = \sup\limits_{x,y \in AdhA} d(x,y) < \sup\limits_{x',y' \in A} d(x',y') + 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$
$= diam(A) + 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$

d'où on conclut que : $diam(AdhA) < diam(A) + 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$

ce qui entraine que $diam(AdhA) \leq diam(A)$ ---(**)

D'après (*) et (**) on conclut que $diam(Adh(A)) = diam(A)$.

2) $diam(A \cup B) \overset{?}{\leq} diam(A) + diam(B) + d(A,B)$

Si $x, y \in A \cup B$ et $a \in A$ et $b \in B$ alors :

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y).$$
$$\leq diam(A) + d(a,b) + diam(B).$$

et donc : $d(x,y) - diam(A) - diam(B) \leq \inf\limits_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a,b) = d(A,B)$

Ainsi : $\sup\limits_{x,y \in A \cup B} d(x,y) \leq diam(A) + diam(B) + d(A,B)$

ce qui montre que : $diam(A \cup B) \leq diam(A) + diam(B) + d(A,B)$.

M. CHOUGUI NADHIR

Exo8 : Soit $O \in \mathcal{T}_{d_1}$. Nous voulons montrer que O est également un ouvert ~~de~~ pour d_2. Soit $x \in O$, puisque O est un ouvert pour d_1 il existe une boule ouverte B_{d_1} ~~$= B(x, r)$~~ de centre x telle que : $x \in B_{d_1} \subset O$. Par hypothèse, il existe une boule ouverte ~~pour d_2~~ $B_{d_2}(x)$ de centre x telle que $x \in B_{d_2}(x) \subset B_{d_1} \subset O$. Par conséquent, $O = \bigcup_{x \in O} B_{d_2}(x)$. Ainsi O est reunion de boules ouvertes pour d_2 et donc est ouvert pour d_2. Ainsi $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$.

Exo9 : Soit $B_{d_1}(f, r)$ une boule ouverte pour d_1 tellque $f \in C[a, b]$. Soit $\varepsilon = \frac{r}{b-a}$, alors en vertu de l'exercice précedent il suffit de montrer que : $B_{d_\infty}(f, \varepsilon) \subset$ ~~$B_{d_1}(f, r)$~~ $B_{d_1}(f, r)$.

Soit $g \in B_{d_\infty}(f, \varepsilon)$, alors $\sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)| < \varepsilon = \frac{r}{b-a}$

Ainsi : $d_1(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt \leq \int_a^b \sup |f(t) - g(t)| dt$

$< \frac{r}{b-a} \int_a^b dt = r.$

Donc, $g \in B_{d_1}(f, r)$ d'où : $B_{d_\infty}(f, \varepsilon) \subset B_{d_1}(f, r)$.

M. CHOUGUI NADHIR.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Introduction à la Topologie

Licence Mathématiques-LMD-Semestre 3

Série 3: Espaces métriques

Exercice 1:

1) Montrer que les applications suivantes définissent des distances sur $\mathbb{R}^n$.

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad d_\infty(x,y) = \sup_{i=1,\ldots,n} (|x_i - y_i|),$$

et dessiner les boules unitaires ouvertes $B((0,0),1)$ dans $\mathbb{R}^2$ pour d_1 et d_∞.
2) Montrer que les applications suivantes sont des distances sur $C[a,b]$.

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt, d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[a,b]} (|f(t) - g(t)|)$$

Exercice 2: Soit $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique et f une fonction réelle croissante définie sur $\mathbb{R}_+$ et satisfaisant à :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x+y) \leqslant f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

1) Montrer que l'application $d_1 = f \circ d$ est une distance sur $\mathbb{X}$.
2) En déduire que les applications suivantes sont des distances sur $\mathbb{X}$.

$$d_2 = \frac{d}{1+d}, \quad d_3 = inf(1,d), \quad d_4 = ln(1+d).$$

Exercice 3: Soit $\mathbb{X}$ un ensemble quelconque. Montrer que :

1) $\delta(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq y \\ 0 \text{ si } x = y \end{cases}$ est une distance sur $\mathbb{X}$.

2) $B(x_0,r) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{si } r \leqslant 1 \\ \mathbb{X} & \text{si } r > 1 \end{cases}$

Exercice 4: Soit $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique et A une partie de $\mathbb{X}$. Montrer que les propositions suivantes son équivalentes :
1) x est un point d'accumulation de A.
2) Tout voisinage V de x contient une infinité de points de A.
3) $x \in Adh(A - \{x\})$.

Exercice 5: Montrer qu'une intersection finie d'ouverts denses de X est un ouvert dense de X.

Exercice 6: Soit $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique et A une partie de $\mathbb{X}$. Montrer que $Adh(A) = \{x \in \mathbb{X} : d(x, A) = 0\}$.

Exercice 7: Soient A et B deux parties bornées d'un espace métrique $(\mathbb{X}, d)$.
1) Montrer que $diam(A) = diam(Adh(A))$.
2) Montrer que $diam(A \cup B) \leqslant diam(A) + diam(B) + d(A, B)$.

Exercice 8: Soient d_1 et d_2 deux distances définies sur un ensemble $\mathbb{X}$ telles que pour toute boule ouverte B_{d_1} de centre $x \in \mathbb{X}$ il existe une boule ouverte B_{d_2} de centre x également, telle que $B_{d_2} \subset B_{d_1}$. Montrer que la topologie $\mathcal{T}_{d_1}$ induite par d_1 est moins fine que la topologie $\mathcal{T}_{d_2}$ induite par d_2, c'est-à-dire $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$.

Exercice 9: Soient d_1 et d_∞ les deux distances définies sur $C[a, b]$ (voir Exercice 1(2)). Montrer que la topologie $\mathcal{T}_{d_1}$ induite par d_1 est moins fine que la topologie $\mathcal{T}_{d_\infty}$ induite par d_∞, c'est-à-dire $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_\infty}$.