

Rappels mathématiques (2 semaines)

1. LES EQUATIONS AUX DIMENSIONS :

1. Equations aux dimensions

Introduction

L'équation aux dimensions (ou analyse dimensionnelle) est un outil important qui nous permet de savoir si une loi physique est correcte ou erronée. A travers l'analyse dimensionnelle il est donc possible :

- De vérifier qu'il n'y a pas de faute dans une loi physique donnée (homogénéité).
- De prévoir logiquement le résultat final.

1.1 Définitions

- Grandeur

En physique, on appelle grandeur toute chose qui soit mesurable. Exemple : masse, masse volumique, température, champ électrique, etc.

- Dimension

La dimension d'une grandeur est simplement sa nature physique. Une grandeur peut avoir la dimension d'une masse, vitesse, énergie, etc.

- Unité

L'unité représente la façon avec laquelle on mesure une grandeur quelconque. Par exemple, si on souhaite mesurer la hauteur d'un mur, on peut utiliser la main, le centimètre, le mètre, etc. Il ne faut donc pas confondre unité et dimension d'une grandeur. Actuellement, on considère pour la mesure du temps, de la longueur et de la masse les conventions suivantes :

- La Seconde = temps requis par un atome de Césium 133 (Ce) pour 9 192 621 770 périodes de sa radiation entre deux états particuliers.
- Le Mètre = distance parcourue par la lumière pendant un temps égal à $1/299\,792\,458$ seconde
- Le kilogramme = masse d'un cylindre en Platine qui se trouve au Bureau International des Poids et Mesures (France).

1.2 Les sept (7) dimensions fondamentales

On convient que toutes les grandeurs physiques peuvent être représentées par 07 dimensions fondamentales : Longueur, Temps, Masse, Température, Quantité de Matière, Intensité Electrique, Intensité Lumineuse.

Dimension	Symbole dimensionnel	Unité (SI)
Longueur	L	Mètre (m)
Temps	T	Seconde (s)
Masse	M	Kilogramme (kg)
Température	θ	Kelvin (K)
Quantité de matière	N	Mole (mol)
Intensité électrique	I	Ampère (A)
Intensité lumineuse	J	Candela

Notation

Si X est une grandeur quelconque, la dimension de X est notée par [X].

Exemples

- S est une surface, on note $[S] = L^2$.
- v est une vitesse, on note $[v] = L.T^{-1}$.
- Les nombres sont considérés sans dimensions, c'est-à-dire,

$$[2] = [-120] = [3,5] = \dots = 1$$

1.3 Principe de l'analyse dimensionnelle

Si Q est une grandeur quelconque, sa dimension peut être exprimée de façon générale par la relation suivante :

$$[Q] = L^\alpha . T^\beta . M^\gamma . \theta^\rho . N^\sigma . I^\nu . J^\lambda$$

Ainsi, si on connaît une définition mathématique de cette grandeur on peut déduire facilement sa dimension en fixant la valeur des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma, \nu$ et λ qui peuvent être positifs ou négatifs.

Remarque

Si on ne connaît pas une définition mathématique de la grandeur, il faut dans ce cas faire une analyse physique du phénomène étudié et déterminer les "paramètres pertinents", c'est-à-dire, les paramètres qui influent directement sur le phénomène (Voir Ex.03,04,05 TD N°01).

1.4 Règles générales

Soient A, B et C des grandeurs quelconques et n, m et l des nombres. On a alors les règles suivantes :

- Règle (01)

$$[A^n] = [A]^n .$$

- Règle (02)

L'équation $A^n + B^m = C^l$ est homogène (ou correcte) si et seulement si

$$[A]^n = [B]^m = [C]^l.$$

- Règle (03)

Si $A^n \cdot B^m = C^l$, alors

$$[A]^n \cdot [B]^m = [C]^l.$$

- **Exemple (01)** : Dimension d'une vitesse

L'équation horaire d'un mouvement rectiligne uniforme est $x = v \cdot t$ où x est la distance, v la vitesse et t le temps. Donc

$$[\text{vitesse}] = [x / t] = [x] / [t] = L / T = L \cdot T^{-1}$$

- **Exemple (02)** : Dimension d'une énergie

L'énergie cinétique d'un objet de masse m se déplaçant à la vitesse v s'écrit $E_c = \frac{1}{2} m v^2$.

On a alors

$$[\text{Energie}] = [1/2] \cdot [m] \cdot [v^2] = 1 \cdot M \cdot (L \cdot T^{-1})^2 = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$$

- **Exemple (03)** : Dimension d'une accélération

Dans un mouvement circulaire uniforme, l'accélération s'écrit $a = v^2 / R$, où v est la vitesse du mobile et R le rayon de la trajectoire. On a donc

$$[\text{Accélération}] = [v^2] / [R] = (L \cdot T^{-1})^2 / L = L^2 \cdot T^{-2} / L = L \cdot T^{-2}$$

Exercice

Après une série d'expériences, on a remarqué que la période T d'un pendule simple dépend de la longueur du fil l et de l'accélération de la pesanteur g . Déduire par un raisonnement simple une relation pour la période.

2. Calcul d'incertitudes

Introduction

L'une des caractéristiques essentielles de la physique c'est qu'elle travaille toujours avec des approximations. Lorsqu'on effectue des mesures sur une grandeur quelconque, des erreurs sont commises à cause des instruments utilisés ainsi qu'à l'expérimentateur lui-même. C'est pour cela que les mesures faites ne représentent pas la stricte réalité et qu'il est donc utile de connaître la précision avec laquelle ces mesures ont été faites. C'est le but du calcul d'incertitudes. D'autre part, si on mesure, par exemple, la valeur de l'accélération de la pesanteur g dans une expérience de chute libre, puisque $g \sim h / t^2$, l'erreur commise sur le temps t aura plus de conséquence qu'une erreur commise sur la hauteur h . On voit donc que le calcul d'incertitudes nous permet aussi de voir quelles sont les grandeurs sur lesquelles la précision doit être améliorée pour avoir un résultat acceptable.

2.1 Définitions

- Incertitude absolue

Dans beaucoup de cas, lorsqu'on mesure une grandeur physique, on ne dispose pas de valeur référence pour pouvoir faire une comparaison. L'incertitude absolue représente alors la limite supérieure de l'erreur commise pendant la mesure. Ainsi, si on souhaite mesurer une grandeur physique x , on écrira que $x = x_0 \pm \Delta x$, où x_0 est la mesure et Δx l'incertitude absolue. Cela veut dire aussi que la valeur réelle de la grandeur x se trouve dans l'intervalle $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ et qu'il n'est pas possible de la connaître avec exactitude.

Exemple : $m = (3 \pm 0,001) \text{ kg} \Leftrightarrow 2,999 < m < 3,001 \text{ kg}$.

Remarque

Lorsqu'on utilise un instrument pour mesurer une grandeur quelconque (longueur, température, etc.) nous considérons la plus petite graduation de l'instrument utilisé comme étant l'incertitude absolue sur la mesure.

- Incertitude relative

L'incertitude absolue, lorsqu'elle est connue, ne nous renseigne pas sur la qualité et la précision des mesures. Pour cela, il faut connaître ce que représente l'erreur commise dans la mesure (incertitude absolue) par rapport à la mesure elle-même. Si x est la mesure effectuée, on a

$$\text{Incertitude Relative} = \Delta x / x$$

L'incertitude relative n'a pas d'unités et s'exprime généralement en % ou bien en ‰.

2.2 Le calcul d'incertitudes

- 1^{er} cas

Lorsque $C = A \pm B$, et si on doit mesurer A et B pour connaître C, alors $\Delta C = \Delta A + \Delta B$.

- 2^{ème} cas

Lorsque $C = A.B$, alors $\Delta C / C = \Delta A / A + \Delta B / B$

- 3^{ème} cas

Lorsque $C = A^m . B^n / D^l$, alors $\Delta C / C = |m| . \Delta A / A + |n| . \Delta B / B + |l| . \Delta D / D$

Le même résultat est valable lorsque $C = A^m . B^n . D^l$.

3. CALCUL VECTORIEL :

3.1. Scalaires et vecteurs

Une quantité scalaire est généralement un nombre affecté d'une unité comme par exemple la résistance d'un résistor, la température ou la pression en un point de l'espace. Alors que pour un résistor la donnée d'un seul nombre suffit à caractériser la valeur de la résistance, d'autres grandeurs physiques dont la valeur change avec par exemple la position dans l'espace ne pourront pas être caractérisées par un seul nombre. Ce type de grandeur fait appel à la notion plus générale de *champ de scalaires*.

Les quantités vectorielles diffèrent des quantités scalaires par le fait qu'elles ne peuvent être définies que si l'on prend soin de préciser la direction, le sens, le point d'application et l'intensité de leur action. Par définition, un vecteur est un bipoint orienté dont la longueur correspond à l'intensité de la quantité vectorielle ainsi représentée. On peut citer bon nombre de grandeurs physiques vectorielles telles que la vitesse, les forces, le champ électrique et le champ magnétique.

La **FIG.1** donne la représentation d'une force de poussée sur un objet. On voit que le vecteur force est caractérisé par une direction qui représente la **droite d'action de la force**, un sens, un point d'application et une intensité schématisée par la longueur du vecteur force.

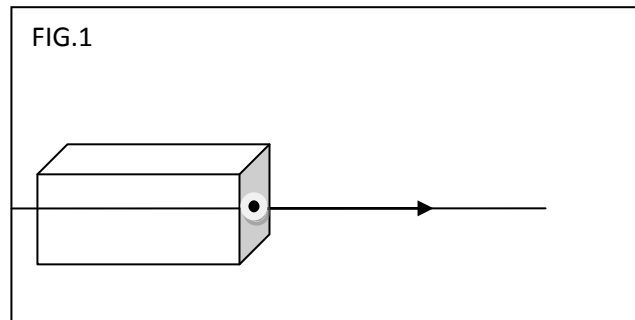


FIG.1 donne la représentation d'une force de poussée sur un objet

3.2. Composantes d'un vecteur

3.2.1. Repère

Le système de référence que l'on choisit est appelé **repère**. Il est constitué d'un système d'axes et d'une origine. Dans l'espace physique, l'un des repères les plus utilisés est le repère **cartésien**. Il est formé d'une origine O et de trois axes x , y et z . Dans le repère choisi, on se définit ensuite une base. En physique, nous utiliserons exclusivement une base orthonormée, c'est-à-dire une base dans laquelle les trois vecteurs de base sont orthogonaux entre eux et unitaires.

La position de la base dans le référentiel définit le système de coordonnées du point dans le référentiel. Un système de coordonnées très utilisé est le système de coordonnées cartésiennes. Il en existe d'autres, comme le système de coordonnées polaires ou sphériques.

3.2.2. Coordonnées cartésiennes

Dans le système de coordonnées cartésiennes présenté sur la **FIG.2**, la direction des vecteurs de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du repère (O, x, y, z) est confondue avec celle des axes du repère. Les vecteurs sont orthonormés, c'est-à-dire orthogonaux entre eux et unitaires (la longueur du vecteur est égale à 1). Tout point M dans l'espace est défini par ses trois coordonnées (x, y, z) et on lui associe un vecteur $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ représenté symboliquement par ses composantes (x, y, z) .

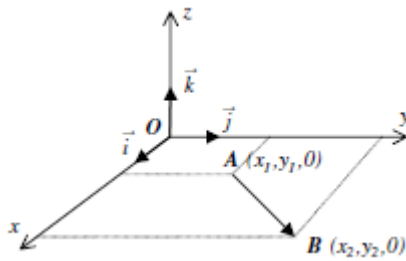


FIG.2 Représentation du système de coordonnées cartésiennes.

A trois dimensions et un vecteur liés deux points A et B quelconque de l'espace pourra toujours s'écrire :

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \quad \text{Avec les coordonnées des points sont } \mathbf{A} (x_1, y_1, z_1), \mathbf{B} (x_2, y_2, z_2)$$

Ou bien : $\vec{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Par définition de la norme, sa longueur est donnée par : $\|\vec{AB}\| = AB = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

3.2.3. Coordonnées cylindriques ou polaires

En coordonnées cylindriques on utilise une base que l'on notera $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ Cette base est utilisée dans tous les problèmes où la symétrie est de révolution autour d'un axe que l'on fixe arbitrairement comme étant l'axe z.

Le vocable « coordonnées polaires » est réservé au problème plan $z = 0$. La base est repérée par rapport au repère (O, x, y, z) par l'angle θ que fait le vecteur \vec{u}_ρ avec l'axe des x.

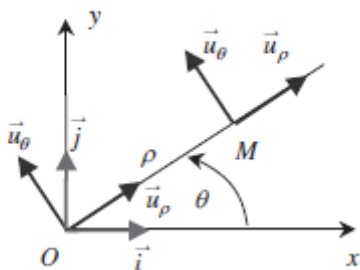


FIG.3 Représentation du système de coordonnées polaires

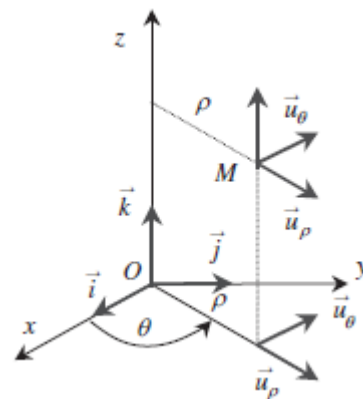


FIG.4 Représentation du système de coordonnées cylindriques

Le vecteur \vec{OM} s'écrit dans la base polaire : $\vec{OM} = \rho\vec{u}_\rho, OM = \rho$

Il est repéré par deux coordonnées de position qui sont ρ et θ .

Dans la **base cylindrique**, ce vecteur s'écrit : $\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{k}$, $OM = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

Il est repéré par trois coordonnées de positions qui sont ρ , θ et z .

3.2.4. Coordonnées sphériques

Ce système de coordonnées, illustré sur la figure 5, est très utile dans tous les problèmes à symétrie sphérique dont un bon exemple est le repérage d'un point à la surface de la Terre. Le

vecteur \vec{OM} est un vecteur radial. Il peut s'exprimer en fonction du vecteur unitaire radial \vec{u}_ρ

qui lui est colinéaire : $\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho$ et la base locale sphérique associée à la position du point M

est formée des trois vecteurs unitaires $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$. Ces trois vecteurs unitaires sont associés de façon à former une base orthonormée directe. Nous noterons que ces vecteurs dépendent de la position du point M et donc varient d'un point à l'autre de l'espace. Seule leur norme reste constante puisqu'ils sont unitaires. Le point M est repéré dans ce système de coordonnées par trois coordonnées de positions qui sont ρ , θ et φ .

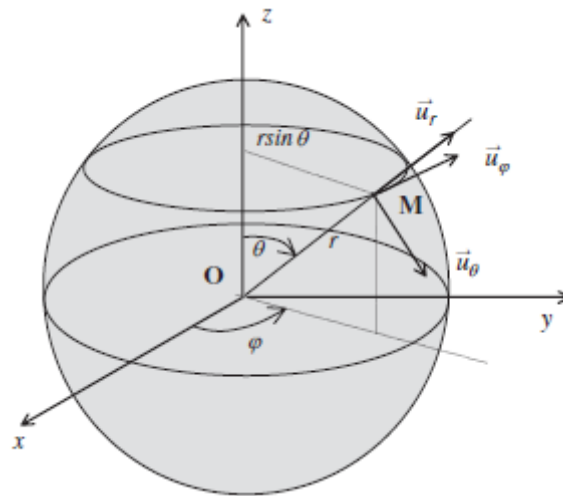


FIG.5 Illustration des grandeurs utilisées dans le système de coordonnées sphériques.

3.3. Produit scalaire

3.3.1. Définition

Soit deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} faisant un angle α entre eux ; on appelle **produit scalaire** de la

quantité scalaire définie par : $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cos \alpha$

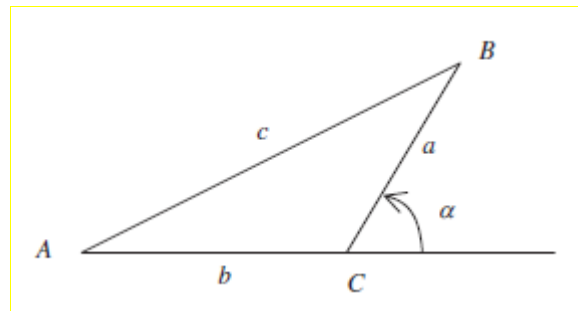


FIG.6 Notations utilisées dans un triangle quelconque ABC

Le produit scalaire est une grandeur positive, négative ou nulle selon la valeur de l'angle α entre les deux vecteurs qui forment le produit. Le calcul du produit scalaire peut se faire à partir des composantes des deux vecteurs. En effet nous avons :

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2\end{aligned}$$

On utilise aussi la notation suivante en vecteur colonne : $\vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

3.3.2. Propriétés

a) Condition de nullité

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} est nul si et seulement si :

- l'un des vecteurs est nul ;
- les deux vecteurs sont perpendiculaires entre eux.

b) Relation avec la norme

La norme d'un vecteur est égale à la racine carrée de l'autoproduit scalaire. $\|\vec{A}\| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$

c) Angle entre deux vecteurs

Par définition, l'angle formé entre deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} est donné par :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|}$$

3.3.3. Applications

a) Identité d'Alcachi : longueur d'un côté d'un triangle

Il est possible de calculer la longueur du côté AB à partir du produit scalaire de AB par lui-même.

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$$

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2 \vec{AC} \cdot \vec{CB}$$

$$c^2 = b^2 + a^2 + 2bc \cdot \cos \alpha$$

b) Travail d'une force constante

Par définition on appelle travail de la force \vec{F} constante sur le déplacement AB rectiligne, la

$$\text{quantité : } W_{F \rightarrow B} = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

3.4. Produit vectoriel

3.4.1. Définition

On appelle **produit vectoriel** de \vec{A} et \vec{B} le vecteur \vec{C} noté : $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ dont la direction est

perpendiculaire à \vec{A} et \vec{B} , le sens est donné par la règle du tirebouchon et la norme, en

désignant par α l'angle entre \vec{A} et \vec{B} , par :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \sin \alpha$$

Nous constatons que les vecteurs \vec{A}, \vec{B} et \vec{C} forment un trièdre direct comme les vecteurs

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans une base orthonormée directe.

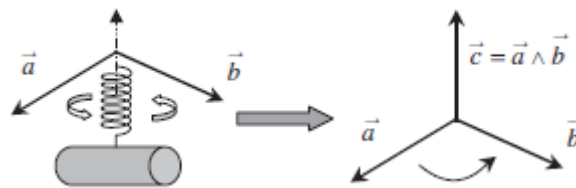


FIG. 7 Détermination du sens du produit vectoriel en utilisant la règle du tire-bouchon.

3.4.2. Propriétés

a) Anticommutativité

Le produit vectoriel change de signe lorsque l'on intervertit les vecteurs. Cette propriété est

appelée anticommutativité ; $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$

b) Condition de nullité

Le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} est nul si et seulement si :

- l'un des deux vecteurs est nul ;
- les vecteurs \vec{A} et \vec{B} ont même direction.

c) Double produit vectoriel

Nous donnons sans démonstration l'expression du double produit vectoriel :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

d) Signification géométrique du produit vectoriel

Considérons deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} faisant un angle α entre eux :

La norme du produit vectoriel est égale à $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \sin \alpha$. C'est la surface grisée du rectangle de la **FIG.8**. Cette surface correspond de toute évidence à la surface du parallélogramme défini par les vecteurs \vec{A} et \vec{B} . En outre, le produit vectoriel représente le vecteur surface orienté perpendiculairement à la surface définie par \vec{A} et \vec{B} .

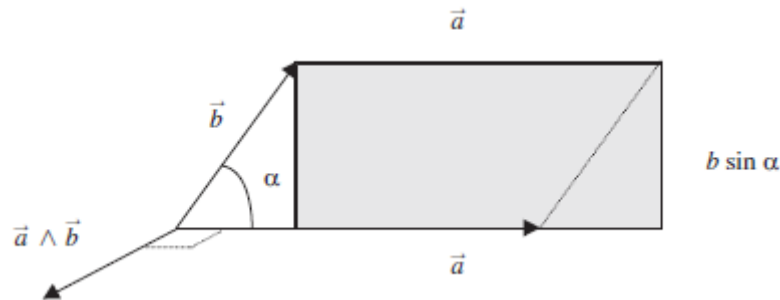


FIG.8 Représentation géométrique de la surface correspondant au produit vectoriel.

3.4.3. Méthode de calcul

Considérons deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} dont les composantes sont données par :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}; \vec{B} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Le produit vectoriel de \vec{A} et \vec{B} peut s'exprimer en fonction des composantes de \vec{A} et \vec{B} par :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \wedge (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k})$$

En développant les produits vectoriels des vecteurs de base il vient :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} z_2 y_1 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}.$$

3.4.4. Applications

a) Normale à un plan

Soit trois points A , B et C . Par ces trois points, il passe un plan dont la normale peut être définie par le produit vectoriel des vecteurs contenus dans le plan. Le vecteur unitaire \vec{u} colinéaire à la normale est donné par :

$$\vec{u} = \frac{\vec{AB} \wedge \vec{AC}}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}$$

3.5. Dérivation vectorielle

3.5.1. Définition

On appelle **dérivée** d'un vecteur \vec{OM} dans une base fixe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le vecteur dont les composantes sont les dérivées des composantes du vecteur \vec{OM} dans cette base, soit :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{OM}}{dt} &= \frac{dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}}{dt} \\ &= \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k} \end{aligned}$$

Il est très important de remarquer que la dérivée des vecteurs de base est nulle car ces vecteurs sont constants. De plus, les règles de dérivation sont les mêmes que pour les fonctions scalaires.

3.5.2. Dérivation d'un vecteur unitaire tournant

La dérivée par rapport au temps d'un vecteur unitaire tournant est égale au vecteur unitaire tournant qui, lui, est directement orthogonal multiplié par la vitesse angulaire de la rotation de la base tournante.

3.6. Différentielle d'un vecteur

3.6.1) Calcul en coordonnées cartésiennes

Considérons (**FIG.9**) un vecteur \vec{OM} de composantes (x, y) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Nous allons considérer que l'extrémité M de ce vecteur se déplace en un point M' très proche de M (déplacement élémentaire). Les coordonnées de M' deviennent $(x = x+dx, y = y+dy)$ avec dx et

dy des déplacements infiniment petits. Nous cherchons à déterminer la différentielle du vecteur \vec{OM} , c'est-à-dire sa variation \vec{MM}' . Il est facile de voir que :

$$\vec{MM}' = \vec{OM}' - \vec{OM} = dx \vec{i} + dy \vec{j}$$

Cette quantité est appelée différentielle du vecteur \vec{OM} et notée $d\vec{OM}$ ou encore déplacement élémentaire \vec{dl} .

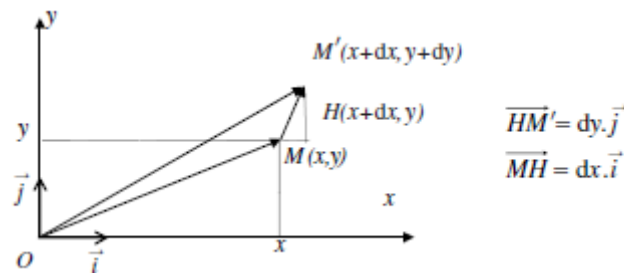


FIG.9 Illustration du calcul de la différentielle d'un vecteur en coordonnées cartésiennes.

La différentielle de ce vecteur considéré comme potentiellement variable est aussi calculable directement à partir de l'expression de \vec{OM} et conduit, en trois dimensions, à la relation suivante :

$$d\vec{OM} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

La quantité obtenue est un vecteur de composantes dx , dy et dz . Elle représente une variation élémentaire quelconque du vecteur \vec{OM} . Il est utile de remarquer que $d\vec{OM}$ représente un déplacement élémentaire dans l'espace. Pour cette raison, la différentielle du vecteur \vec{OM} est notée $d\vec{OM} = \vec{dl}$.

3.6.2) Expression en coordonnées polaires

Cette même variation élémentaire $d\vec{OM}$ du vecteur \vec{OM} peut s'exprimer en coordonnées polaires. On peut comme on l'a fait précédemment déterminer la différentielle soit graphiquement soit par un calcul direct. Commençons par la méthode graphique :

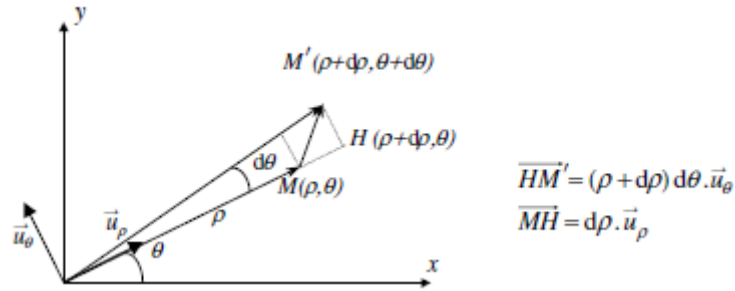


FIG.10 Illustration du calcul de la différentielle d'un vecteur en coordonnées polaires.

Il est facile de voir sur le schéma de la **FIG.10** que la différentielle du vecteur \vec{OM} qui est définie par $d\vec{OM} = \vec{MM}' = \vec{OM}' - \vec{OM}$, peut se décomposer dans la base polaire en :

$$d\vec{OM} = \vec{MH} + \vec{HM}' = d\rho \vec{u}_\rho + (\rho + d\rho) d\theta \vec{u}_\theta$$

Le déplacement élémentaire $d\rho$ est négligeable par rapport à ρ , ce qui conduit à :

$$d\vec{OM} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta$$

Le calcul direct se fait en utilisant les règles de différenciation d'un produit de fonction et de dérivation d'un vecteur unitaire tournant :

$$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho \implies d\vec{OM} = d(\rho \vec{u}_\rho) = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\vec{u}_\rho = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta$$

Le résultat précédent peut être généralisé en coordonnées cylindriques en ajoutant un déplacement élémentaire dans la direction \vec{u}_z soit :

$$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z \implies d\vec{OM} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

c) Expression en coordonnées sphériques

Nous partons de la position du point M qui est donnée par $\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho$ et nous nous bornons à décrire graphiquement le déplacement élémentaire $d\vec{l}$. Tout déplacement élémentaire \vec{MM}' de l'extrémité du vecteur \vec{OM} peut être projeté sur les vecteurs de bases $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$. Ce déplacement élémentaire engendre des variations élémentaires $(d\rho, d\theta, d\varphi)$ des paramètres de position (ρ, θ, φ) du point M . Ces variations élémentaires doivent être converties en

déplacements élémentaires en particulier lorsqu'il s'agit des angles. Elles s'obtiennent facilement en utilisant la **FIG.11**.

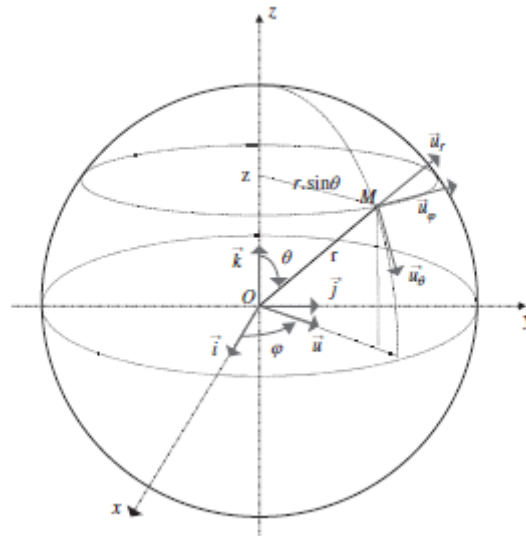


FIG.11 Détermination d'un déplacement élémentaire en coordonnées sphériques.

Détermination d'un déplacement élémentaire en coordonnées sphériques :

- selon \vec{u}_ρ le passage de ρ à $\rho + d\rho$ produit le déplacement $d\rho$;
- selon \vec{u}_θ le passage de θ à $\theta + d\theta$ produit un déplacement $\rho d\theta$;
- selon \vec{u}_φ le passage de φ à $\varphi + d\varphi$ produit un déplacement $\rho \sin \theta d\varphi$.

Le vecteur \vec{dl} , dont les composantes dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ sont les valeurs précédemment déterminées, s'écrit donc :

$$d\vec{OM} = \vec{dl} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta + \rho \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

Chapitre I : Cinématique (5 semaines)

La mécanique est l'étude du mouvement de systèmes matériels caractérisés par des observables spatio-temporelles. De façon plus précise, les *systèmes mécaniques* seront définis par un ensemble fini ou infini de points matériels soumis à des forces appliquées supposées connues,

L'objet de la cinématique du point est d'étudier le mouvement d'un point au cours du temps indépendamment des causes qui produisent ce mouvement. Les objectifs sont la détermination des grandeurs cinématiques telles que les vecteurs d'accélération, vitesses, positions et l'équation horaire de la trajectoire de ce point par rapport à un référentiel choisi par l'observateur.

1. Notion de référentiel

Un *référentiel* est un ensemble de points tous fixes les uns par rapport aux autres. L'observateur qui étudie le mouvement d'un point est lui-même immobile dans ce référentiel.

Exemples de référentiel à connaître

Le *référentiel de Copernic* : L'origine du repère définissant ce référentiel correspond au centre d'inertie du système solaire (pratiquement confondu avec le centre d'inertie du Soleil). Les 3 axes du repère sont dirigés vers 3 étoiles qui s'éloignent du Soleil toujours dans la même direction.

Le *référentiel géocentrique* : Le repère caractérisant ce référentiel a pour origine le centre de la Terre et les 3 axes sont des axes qui restent parallèles à ceux du référentiel de Copernic.

Le *référentiel terrestre* : L'origine de repère choisi est liée à la Terre ainsi que les 3 axes. Le référentiel terrestre est un référentiel en rotation uniforme par rapport au référentiel géocentrique (rotation autour d'un axe Nord- Sud fixe dans le référentiel géocentrique). Le référentiel géocentrique est en mouvement de translation circulaire uniforme par rapport au référentiel de Copernic.

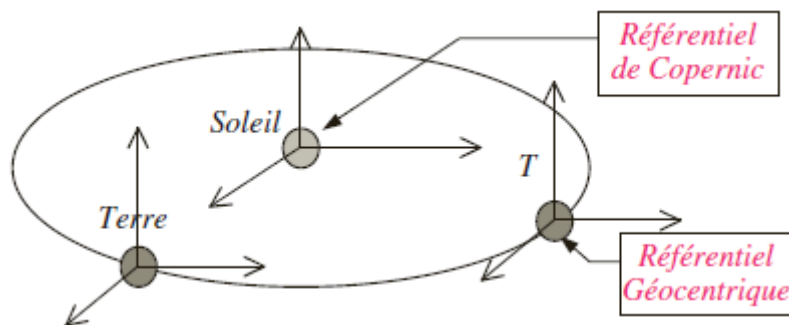


FIG.12 Les référentiels de Copernic et géocentrique

2. Repères

a) Repère d'espace

Un repère d'espace est défini par une origine O qui est fixe dans le référentiel et des axes de référence orthonormés c'est-à-dire orthogonaux et munis d'une unité de longueur (vecteur unitaire de norme égale à 1) qui vont permettre à l'observateur de juger dans quelle direction se trouve le point. Les trois axes forment un trièdre direct.

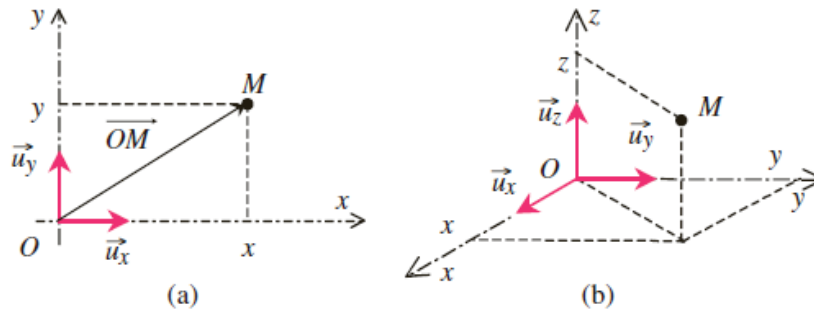


FIG.13 Repère dans un plan (a) et dans l'espace (b).

b) Repère de temps

La durée écoulée entre 2 événements ou 2 instants est mesurée au moyen d'une horloge ou chronomètre. **Le repère de temps est constitué d'une origine des temps fixée par l'observateur et d'une durée unitaire fixant une chronologie.** À chaque instant, on associe un nombre réel t appelé date qui correspond à la durée écoulée depuis l'instant origine.

En mécanique classique ou newtonienne, on postule que le repère de temps est le même pour tous les référentiels et que le temps s'écoule de la même manière dans des référentiels en mouvement les uns par rapport aux autres.

3. Vecteur position

a) Le système de coordonnées cartésiennes

Un point M est repéré par ses coordonnées d'espace (x, y, z) correspondant à la mesure algébrique de la projection de M successivement sur les 3 axes du repère. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base associée à ce système d'axe est une base orthonormée qui ne change pas au cours du temps.

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

Les composantes de ce vecteur, dans la base cartésienne correspondent alors aux coordonnées du point M .

b) Le système de coordonnées polaires

Il existe d'autres systèmes permettant de positionner un point dans le repère d'étude comme par exemple le système de coordonnées polaires utilisé dans le cas où le point M est

mobile dans un plan. Le point M est parfaitement repéré si on connaît la distance $OM = \rho$ et l'angle θ que fait le segment OM avec l'axe Ox . Pour exprimer le vecteur position il est commode (ou convenable) d'introduire une nouvelle base orthonormée directe associée à ce système de coordonnées et définie de la façon suivante :

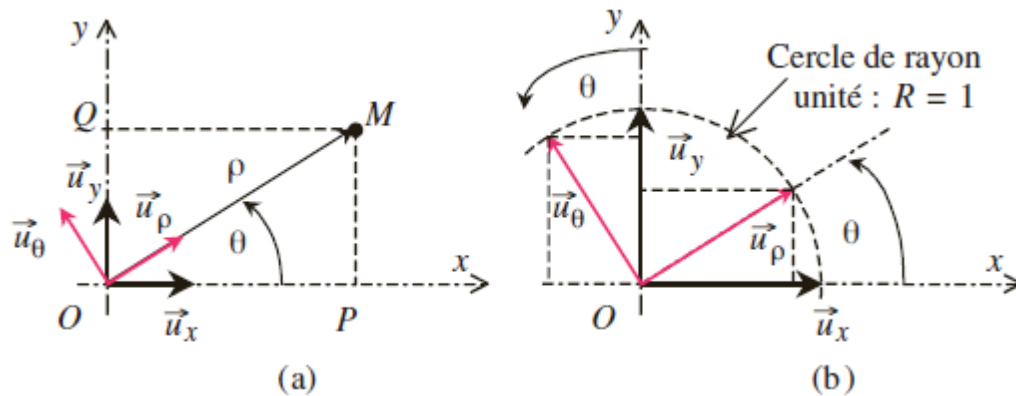


FIG.14 Les coordonnées polaires (ρ, θ) et la base associée $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.

* \vec{u}_ρ Le vecteur unitaire suivant la direction et le sens de O vers M . c'est le vecteur *radial* (suivant le rayon) ;

* \vec{u}_θ Le vecteur unitaire perpendiculaire au vecteur \vec{u}_ρ . Il est obtenu en effectuant une rotation d'un angle de $+\frac{\pi}{2}$ à partir du vecteur \vec{u}_ρ . Le vecteur position s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = \|\overrightarrow{OM}\| \vec{u}_\rho = \rho \vec{u}_\rho$$

Liens entre les systèmes de coordonnées polaires et cartésiennes

$$\cos \theta = \frac{OP}{OM} = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{PM}{OM} = \frac{OQ}{\rho} = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho \sin \theta$$

$$\text{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x}$$

En appliquant le théorème de Pythagore on a :

$$OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

On en déduit alors les expressions suivantes :

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\vec{U}_\rho = \cos \theta \vec{U}_x + \sin \theta \vec{U}_y$$

$$\vec{U}_\theta = -\sin \theta \vec{U}_x + \cos \theta \vec{U}_y$$

c) Le système de coordonnées cylindriques

Si le point doit être repéré dans l'espace il est possible d'utiliser les coordonnées cylindriques. Il suffit de compléter le système de coordonnées polaires par un troisième axe : l'axe Oz avec sa coordonnée cartésienne z . La projection P du point M dans le plan (O, x, y) est repérée en coordonnées polaires (ρ, θ) . La projection de M sur l'axe Oz donne la cote z . Le vecteur position \vec{OM} s'obtient en utilisant la relation de Chasles :

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$$

$$\|\vec{OM}\| = OM = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Les coordonnées cylindriques de M sont donc (ρ, θ, z) . Les composantes du vecteur position sont (ρ, z) dans la base cylindrique $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.

d) Le système de coordonnées sphériques

Les vecteurs unitaires pour les coordonnées sphériques (ρ, θ, φ) d'un point M sont définies par :

$$\vec{U}_\rho = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}$$

$$\vec{U}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}$$

$$\vec{U}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} = (\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi) \vec{i} + (\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi) \vec{j} - \dot{\theta} \sin \theta \vec{k}$$

Ensuite, en utilisant les expressions de \vec{U}_θ et \vec{U}_φ dans l'équation $\frac{d\vec{U}_\rho}{dt}$, on constate que

$$\text{l'équation ci-dessus se réduit à : } \frac{d\vec{U}_\rho}{dt} = \dot{\varphi} \sin \theta \vec{U}_\varphi + \dot{\theta} \vec{U}_\theta.$$

Les deux autres dérivés se trouvent à travers une procédure similaire. Les résultats sont :

$$\frac{d\vec{U}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{U}_\rho + \dot{\varphi}\cos\theta\vec{U}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{U}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\sin\theta\vec{U}_\rho - \dot{\varphi}\cos\theta\vec{U}_\theta$$

L'expression du vecteur vitesse en coordonnées sphériques est:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{U}_\rho + \rho\dot{\varphi}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\vec{U}_\theta$$

Pour trouver l'accélération, nous dérivons l'expression ci-dessus par rapport au temps.

$$a = \frac{dv}{dt} = \ddot{\rho}\vec{U}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} + \frac{d(\rho\dot{\varphi}\sin\theta)}{dt}\vec{U}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\sin\theta\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} + \frac{d(\rho\dot{\theta})}{dt}\vec{U}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{U}_\theta}{dt}$$

$$a = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - \rho\dot{\theta}^2)\vec{U}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} - \rho\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{U}_\theta +$$

$$(\rho\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\sin\theta + 2\rho\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\vec{U}_\varphi$$

4. Vecteur vitesse et accélération d'un point

4.1 Définition

a) **Vitesse moyenne** est la distance parcourue par unité de temps, Si la position du point mobile M à l'instant t_1 correspond au point $M(t_1) = M_1$ et à l'instant t_2 au point $M(t_2) = M_2$, le

vecteur vitesse moyenne se définit par : $\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\Delta t}$

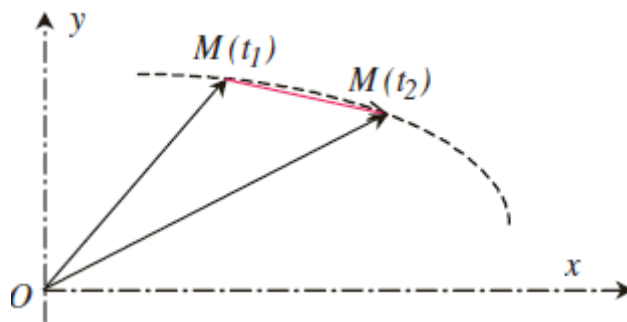


FIG 15 Variation de la position dans le temps : vitesse moyenne.

b) Vecteur vitesse instantanée

La vitesse instantanée peut se définir comme une vitesse moyenne entre la position $M_1 = M(t)$ du point mobile à la date t et la position $M_2 = M(t + \Delta t)$ de ce même point à la date $t + \Delta t$ où Δt représente une durée très faible. Cette vitesse moyenne tend d'autant plus vers la

vitesse instantanée à la date t que la durée Δt tend vers zéro. Le vecteur position $\vec{OM}(t)$ est une fonction du temps et la vitesse instantanée correspond alors à la dérivée par rapport au temps du vecteur position :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{OM}(t + \Delta t) - \vec{OM}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

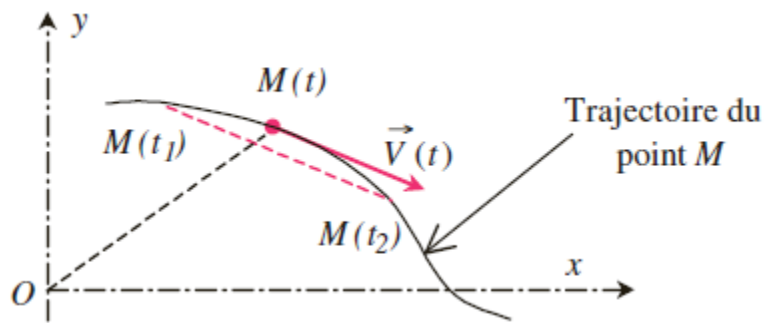


FIG. 16 Vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ tangent à la trajectoire au point $M(t)$ considéré.

Lorsque le point M' tend vers le point M , la corde MM' tend vers la tangente à la trajectoire au point M . Le vecteur vitesse est un vecteur tangent à la trajectoire au point considéré.

c) Vecteur accélération d'un point

Le vecteur accélération va rendre compte des variations du vecteur vitesse par rapport au temps. Le vecteur accélération correspond donc à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ c'est-à-dire aussi à la dérivée seconde du vecteur position $\vec{OM}(t)$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$$

4.2) Expression en coordonnées cartésiennes

À partir de l'expression du vecteur position $\vec{OM}(t)$ et de la définition du vecteur vitesse on obtient :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d[x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z]}{dt}$$

En appliquant la règle de dérivation d'une somme l'expression devient :

$$\vec{V}(t) = \frac{d(x\vec{u}_x)}{dt} + \frac{d(y\vec{u}_y)}{dt} + \frac{d(z\vec{u}_z)}{dt}$$

Les vecteurs de la base cartésienne sont des vecteurs indépendants du temps. Si le point M est mobile, seules les composantes x , y et z sont des fonctions du temps : $x=x(t)$; $y=y(t)$; $z=z(t)$.

L'expression devient :

$$\vec{V}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$$

Le vecteur vitesse s'écrit en cartésienne : $\vec{V}(t) = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$

La valeur V de la vitesse correspond à la norme $V(t)$:

$$\|\vec{V}(t)\| = V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

À partir de l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ et de la définition du vecteur accélération on obtient :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d[\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z]}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d(\dot{x}\vec{u}_x)}{dt} + \frac{d(\dot{y}\vec{u}_y)}{dt} + \frac{d(\dot{z}\vec{u}_z)}{dt}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

4.3) Expression en coordonnées polaires

Lorsque le point se déplace dans un plan il est possible de choisir le système de coordonnées polaires. La base associée $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ est alors une base « mobile » : les vecteurs sont en rotation dans le plan (O,x,y) et sont donc des fonctions du temps. À partir de l'expression du vecteur position $\vec{OM}(t)$ et de la définition du vecteur vitesse on obtient :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d[\rho\vec{u}_\rho]}{dt}$$

En appliquant la règle de dérivation d'un produit de fonction on obtient :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\rho}{dt} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$$

On aura donc :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \vec{u}_\theta \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = (-\cos\theta) \vec{u}_x + (-\sin\theta) \vec{u}_y = -\vec{u}_\rho$$

*****Règle de dérivation d'un vecteur unitaire par rapport à l'angle polaire :**

La dérivée par rapport à l'angle polaire θ d'un vecteur unitaire U (qui ne dépend que de l'angle θ) est un vecteur unitaire qui lui est directement perpendiculaire (rotation de $\pi/2$ dans le sens positif).

*****Règle de dérivation d'un vecteur unitaire par rapport au temps :**

La dérivée par rapport au temps t d'un vecteur de norme constante est un vecteur dont la norme est obtenue en multipliant celle de U par la vitesse angulaire w et qui est directement perpendiculaire à U (rotation de $\pi/2$ dans le sens positif).

En reprenant l'expression de la vitesse et en utilisant le résultat de la dérivation du vecteur unitaire, on obtient :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\rho}{dt} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{V}(V_\rho = \dot{\rho} ; V_\theta = \rho \dot{\theta})$$

où V_ρ et V_θ sont respectivement les composantes radiale et orthoradiale du vecteur vitesse dans la base polaire.

La valeur V de la vitesse correspond à la norme de $\vec{V}(t)$

$$\|\vec{V}(t)\| = V = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\theta})^2}$$

À partir de l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ et de la définition du vecteur accélération on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d[\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta]}{dt} \\ \vec{a} &= \frac{d[\dot{\rho}\vec{u}_\rho]}{dt} + \frac{d[\rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta]}{dt}\end{aligned}$$

La base polaire étant une base mobile dans le référentiel d'étude, le premier terme est *a priori* un produit de 2 fonctions du temps et le deuxième terme un produit de 3 fonctions du temps. En utilisant le résultat donnant la dérivée des vecteurs de la base polaire, on a

$$\begin{aligned}\frac{d[\rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta]}{dt} &= \frac{d\rho}{dt}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \\ \frac{d[\rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta]}{dt} &= (\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho\end{aligned}$$

L'expression finale est obtenue en ajoutant les deux expressions :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [\ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta] + [(\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho] \\ \vec{a} &= \ddot{\rho}\vec{u}_\rho - \rho\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u}_\theta \\ \vec{a} &= a_\rho\vec{u}_\rho + a_\theta\vec{u}_\theta\end{aligned}$$

Le premier terme \vec{u}_ρ correspond à la composante radiale de l'accélération, le second \vec{u}_θ à l'accélération orthoradiale.

4.4) Expression en coordonnées cylindriques

En dérivant l'expression du vecteur position $\vec{OM}(t)$ et en tenant compte des résultats obtenus en cartésienne et en polaire, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(\rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z)}{dt}$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d(\rho \vec{u}_\rho)}{dt} + \frac{d(z \vec{u}_z)}{dt}$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\rho}{dt} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$$

$$\vec{V}(t) = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$$

La valeur V de la vitesse correspond à la norme de ce vecteur :

$$\|\vec{V}(t)\| = V = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$$

À partir de l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ et de la définition du vecteur accélération on obtient :

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{u}_\rho + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$$

Exemple :

Le mouvement d'un point m est décrit par les deux coordonnées $\rho = at^2$ et $\theta = \omega t$.

Calculer les vecteurs vitesse et accélération de ce mouvement.

4.5) Expression de la vitesse et l'accélération dans la base de Frenet

La base de Frenet est une base locale qui se déplace avec le point M . Elle est utilisée lorsque le mouvement du point M est curviligne.

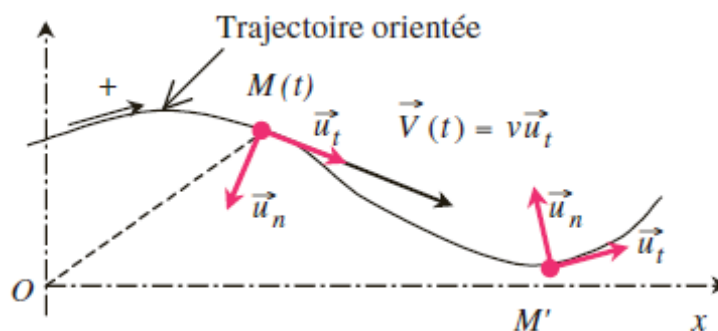


FIG.17 La base de Frenet (base intrinsèque)

Dans le cas d'un mouvement plan, et en définissant en tout point M un vecteur unitaire \vec{u}_t tangent à la trajectoire et orienté comme celle-ci, le vecteur vitesse, lui-même tangent à la trajectoire au point M peut s'écrire : $\vec{v}(t) = v\vec{u}_t$ et $\|\vec{v}\| = v = |v|$

Le vecteur accélération peut s'écrire : $\vec{a}(t) = a_t\vec{u}_t + a_n\vec{u}_n$

La composante a_t est la composante tangentielle et a_n est la composante normale centripète. La dérivée du vecteur vitesse dans cette base conduit au résultat suivant :

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad (\text{Dérivée de la valeur algébrique de la vitesse})$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (\text{Vitesse au carré divisée par le rayon de courbure } R)$$

Le rayon de courbure correspondant au rayon du cercle tangent à la trajectoire au point considéré. La composante a_n est toujours positive et donc le vecteur accélération est toujours tourné vers la concavité.

5. Applications :

5.1 Définitions

- **Les équations horaires du mouvement** sont les fonctions $\{x(t), y(t), z(t)\}$ ou $\{\rho(t),$

$$\theta(t), z(t)\}, \text{ par exemple : } x(t) = v_0 t \text{ et } y(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2$$

- **L'équation de la trajectoire** c'est la relation liant x, y et z ou liant ρ et θ et z indépendamment du temps. Cette équation est obtenue en éliminant le temps entre les

$$\text{différentes coordonnées ou équations horaires, par exemple : } y = \frac{1}{2} a_0 \frac{x^2}{v_0^2}$$

- **L'équation différentielle** c'est une équation reliant une fonction (par exemple $x(t)$)

$$\text{avec ses dérivées, par exemple : } \ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

5.2 Mouvements rectilignes

La trajectoire est une portion de droite. Il est évident alors de repérer le point M sur cette droite confondue, par exemple : $\vec{OM}(t) = x(t)\vec{i}$, il arrive donc : $\vec{V}(t) = \dot{x}\vec{i}$ et $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i}$

- **Le mouvement rectiligne uniforme** si le point matériel se déplace à vecteur vitesse constant. $\vec{v} = \overrightarrow{cste}$

Le vecteur vitesse étant constant, le mouvement est rectiligne car la vitesse est tangente à la trajectoire. $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x = C\vec{u}_x \Rightarrow \dot{x} = C$

Ce qui conduit à l'équation horaire suivante : $x = Ct + x_0$

- **Le mouvement uniformément varié**

Un mouvement est dit rectiligne uniformément varié si le vecteur accélération est constant et la trajectoire rectiligne.

$$\vec{OM}(t) = x(t)\vec{i} \Rightarrow \vec{V}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} \text{ et } \vec{a} = \ddot{x}\vec{i}$$

Par intégration de cette équation nous obtenons la vitesse du point M : $v = \dot{x} = Ct + B$

Ce qui, par une nouvelle intégration, conduit à l'équation horaire du mouvement :

$$x = \frac{1}{2}Ct^2 + Bt + D$$

Les constantes B et D qui sont apparues dans les deux intégrations successives, sont déterminées par les *conditions initiales* du mouvement du point M .

Remarques

L'étude du signe du produit de la vitesse par l'accélération permettra de préciser si le mouvement est *accélééré* ($\dot{x} \cdot \ddot{x} > 0$) ou *retardé* ($\dot{x} \cdot \ddot{x} < 0$).

5.3. Mouvement circulaire uniforme

Le mouvement d'un point est dit circulaire uniforme si :

- le point se déplace sur un cercle ;
- sa vitesse angulaire de rotation est constante.

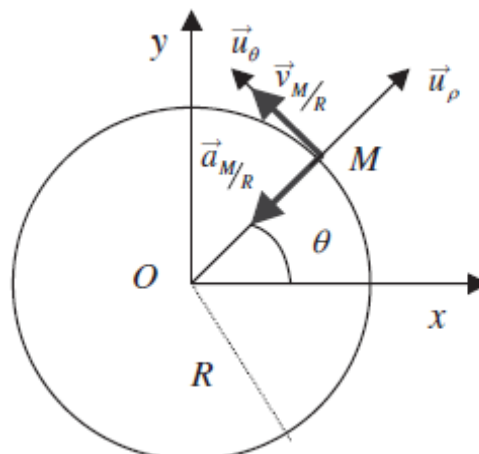


FIG.18 Mouvement circulaire uniforme.

L'équation différentielle du mouvement est donnée par : $\frac{d\theta}{dt} = \omega = cste$

ce qui conduit par intégration à $\theta = \omega t + \theta_0$

Les caractéristiques cinématiques du mouvement circulaire uniforme peuvent se déduire du schéma de la figure 18 et sont données par :

$$\vec{OM}(t) = \rho(t) \vec{u}_\rho = \rho \cos \theta \vec{i} + \rho \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}(t) = -\rho \dot{\theta}^2 \vec{u}_\rho$$

Remarque

Nous remarquons donc que le mouvement circulaire uniforme est un mouvement accéléré dont l'accélération est centripète. En remarquant que $\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho$ on peut donner une expression du vecteur vitesse indépendante de la base choisie. En effet on obtient :

$$\vec{v}(t) = \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta(t) = \rho \dot{\theta} \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho(t) = \dot{\theta} \vec{u}_z \wedge \rho \vec{u}_\rho(t) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}(t)$$

Dans cette expression

$\vec{\omega}$ est le vecteur vitesse angulaire. Cette relation est valable pour tout mouvement circulaire. On obtient de même pour le vecteur accélération :

$$\vec{a}(t) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}(t)) = \vec{\omega} \wedge \vec{v}(t)$$

Ce résultat peut être obtenu directement en dérivant le vecteur vitesse exprimé sous forme d'un produit vectoriel

$$\vec{a}(t) = \frac{d \vec{v}(t)}{dt} = \frac{d (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}(t))}{dt} = \frac{d \vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM}(t) + \vec{\omega} \wedge \frac{d \vec{OM}(t)}{dt}$$

5.4 Mouvement hélicoïdal

Le mouvement hélicoïdal est la combinaison d'un mouvement de translation rectiligne uniforme selon l'axe des z et d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan xOy .

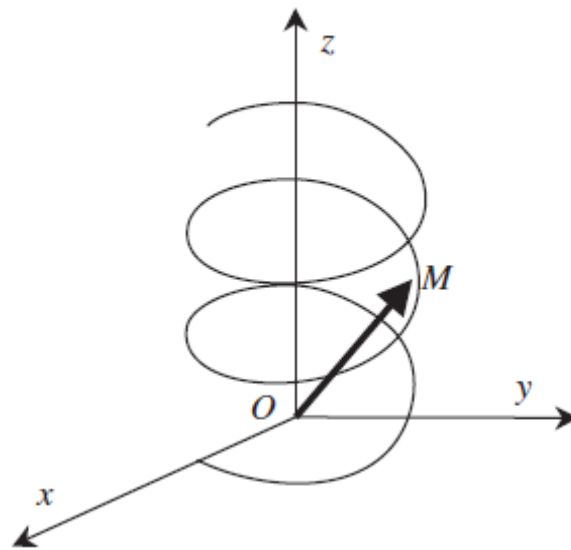


FIG.19 Illustration d'un mouvement hélicoïdal.

Les équations horaires du mouvement selon les trois axes x , y , z du référentiel cartésien sont :

$$x(t) = R \cos \omega t ; \quad y(t) = R \sin \omega t ; \quad z(t) = v_0 t$$

Il est facile de déterminer par dérivations successives les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération du point dans cette base :

$$\vec{v}_{M/R} = \begin{pmatrix} -R\omega \sin \omega t \\ R\omega \cos \omega t \\ v_0 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_{M/R} = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \cos \omega t \\ -R\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

De même, les expressions de la vitesse et de l'accélération dans la base cylindrique sont données par :

$$\vec{v}_{M/R} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\omega \\ v_0 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_{M/R} = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.5 Mouvement parabolique

Supposons que le vecteur accélération soit un vecteur constant et qu'à l'instant $t = 0$, le vecteur vitesse \vec{v}_0 soit donné (voir FIG.20).

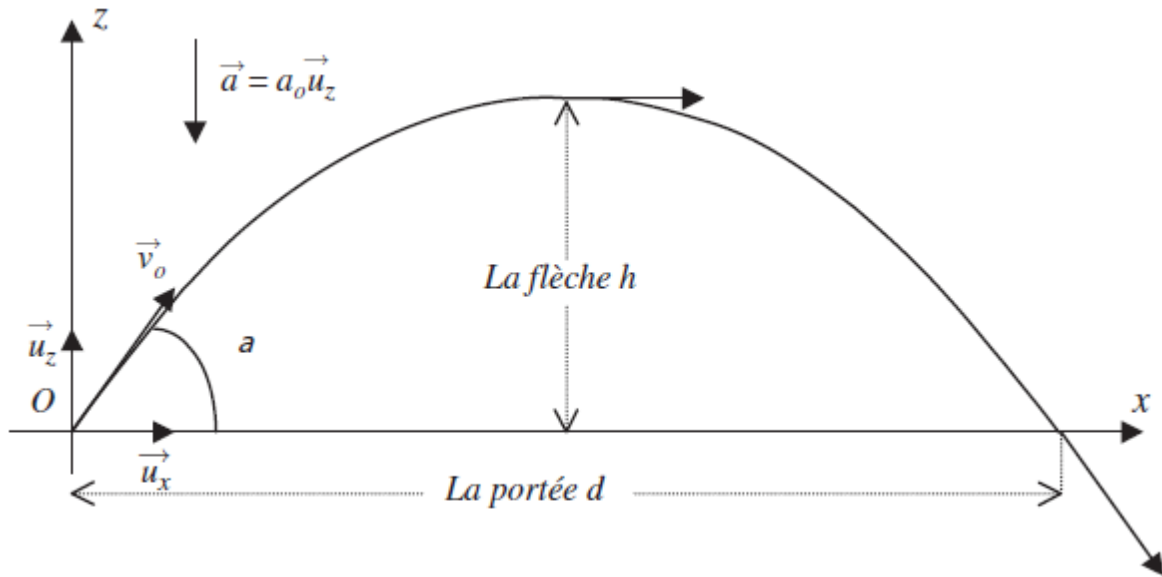


FIG.20 Chute parabolique.

Le choix du repère étant libre, nous pouvons décider de le définir à partir des données du problème. Nous faisons le choix suivant pour des raisons de bon sens :

- origine du repère : position du point à $t = 0\text{s}$;
- axe z suivant le vecteur accélération, soit $\vec{a} = a \vec{k}$;
- axe x perpendiculaire à l'axe z et dans le plan contenant \vec{a} et \vec{v} . On aura alors :

$\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{u}_x + v_{0z} \vec{u}_z$, axe y défini de sorte que \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} forment une base orthonormée directe.

On obtient, par intégrations successives et en tenant compte des conditions initiales :

$$\vec{a}_{M/R} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a_0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{v}_{M/R} \begin{vmatrix} v_{0x} \\ 0 \\ a_0 t + v_{0z} \end{vmatrix} \quad \text{soit} \quad \overline{OM} = \begin{vmatrix} x = v_{0x} t + x_0 = v_{0x} t \\ y = y_0 = 0 \\ z = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_{0z} t + z_0 = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_{0z} t \end{vmatrix}$$

Le mouvement projeté suivant l'axe des x est un mouvement uniforme de vitesse v_{0x} .

Le mouvement projeté suivant l'axe des z est uniformément varié, d'accélération constante a_0 .

En éliminant la variable t entre les deux équations horaires du mouvement, on obtient

$$\text{l'équation de la trajectoire : } t = \frac{x}{v_{0x}} \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{2} a_0 \frac{x^2}{v_{0x}^2} + v_{0z} \frac{x}{v_{0x}}$$

Si α est l'angle que fait le vecteur vitesse \vec{V}_0 avec l'axe des x et v_0 la norme de ce vecteur

$$\text{vitesse, on peut encore écrire : } z = \frac{1}{2} a_0 \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha$$

La trajectoire est une portion de parabole.

L'accélération \mathbf{a}_0 correspond à l'accélération de la pesanteur $-\mathbf{g}$

La portée d correspond à la distance maximale que peut atteindre le point lorsque qu'il revient à l'ordonnée $z = 0$.

$$z = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ et } x = d = -\frac{v_0^2}{a_0} 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

La **flèche** h correspond à l'altitude maximale que peut atteindre le point mobile. Elle peut être obtenue de différentes façons. On peut rechercher, par exemple, l'ordonnée correspondant à l'abscisse $x = d/2$. On obtient alors :

$$h = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha \right)^2 + \left(\frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha \right) \tan \alpha$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

5.6 Mouvement relatif

Dans ce qui va suivre, nous considérons deux référentiels R et R' . Le premier est caractérisé par un de ses repères (O, x, y, z) avec la base correspondante $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et le second par (O', x', y', z') avec la base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$. Prenons un mouvement combinant une translation et une rotation en faisant intervenir la vitesse de O' par rapport à R ainsi que le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{R'/R}$ caractérisant la rotation de R' par rapport à R . En partant de :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

on voit que :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_R + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_R$$

Or la dérivée de $\overrightarrow{O'M}$ dans R peut s'exprimer à partir de la dérivée de ce même vecteur dans R' , d'où :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_R + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

Nous obtenons ainsi la loi de composition des vitesses dans un cas général :

$$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{O'/R} + \vec{v}_{M/R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

On distingue dans cette expression deux termes :

- $\vec{V}_{M/R'}$ qui représente la vitesse de M par rapport à R' et que l'on appelle **vitesse relative** de M par rapport à R' .
- $\vec{V}_{O'/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}$ qui est la **vitesse d'entraînement** de M dans son mouvement par rapport à R . Cette vitesse est la somme de deux termes. Le premier terme correspond à la vitesse d'entraînement due au déplacement de l'origine O' (*terme de translation*) et le deuxième correspond à la vitesse d'entraînement due à la rotation de R' par rapport à R (*terme de rotation*).

Nous cherchons à exprimer l'accélération du point M par rapport à R connaissant les caractéristiques du mouvement par rapport à R' . Nous supposons que le référentiel R' est en mouvement de translation rotation par rapport à R . La loi de composition des vitesses nous donne :

$$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{M/R'} + \vec{v}_{O'/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}$$

et par définition nous avons :

$$\vec{a}_{M/R} = \left(\frac{d \vec{v}_{M/R}}{dt} \right)_R$$

Il en résulte que :

$$\vec{a}_{M/R} = \left(\frac{d \left(\vec{v}_{M/R'} + \vec{v}_{O'/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M} \right)}{dt} \right)_R$$

On obtient donc :

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{O'/R} + \left(\frac{d \vec{v}_{M/R'}}{dt} \right)_R + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \left(\frac{d \vec{O'M}}{dt} \right)_R + \frac{d \vec{\Omega}_{R'/R}}{dt} \wedge \vec{O'M}$$

Il importe à ce stade de commenter les règles de dérivation. Nous voyons que par définition nous dérivons, pour obtenir l'accélération de M par rapport à R , la vitesse de M dans R par rapport au temps. En faisant cette opération, il apparaît dans le second membre des vecteurs qui sont manifestement des vecteurs liés au référentiel R' comme par exemple le vecteur $\vec{O'M}$ ou encore le vecteur $\vec{V}_{M/R'}$. Nous souhaitons faire apparaître leur dérivée dans R' et nous utilisons donc à cette fin la règle de dérivation:

$$\left(\frac{d\vec{X}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{X}}{dt} \right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{X}$$

Appliquée aux vecteurs $\vec{O'M}$ et $V_{M/R}$, cette règle conduit à :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_R &= \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M} \\ \left(\frac{d\vec{v}_{M/R'}}{dt} \right)_R &= \left(\frac{d\vec{v}_{M/R'}}{dt} \right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{M/R'} \end{aligned}$$

Nous concluons donc que :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_R &= \vec{v}_{M/R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M} \\ \left(\frac{d\vec{v}_{M/R'}}{dt} \right)_R &= \vec{a}_{M/R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{M/R'} \end{aligned}$$

Le report de ces expressions dans l'équation (2.3) conduit à écrire le vecteur accélération de M par rapport à R sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{M/R} &= \vec{a}_{M/R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c \\ \text{avec : } \vec{a}_e &= \vec{a}_{O'/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}) + \frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt} \wedge \vec{O'M} \\ \vec{a}_c &= 2\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{M/R'} \end{aligned}$$

Le résultat ci-dessus constitue la loi de composition des accélérations.

Il est alors possible de distinguer trois termes dans cette expression :

- le premier terme du second membre $\vec{a}_{M/R'}$ qui représente l'accélération de M dans R' ou **accélération relative** ;
- le dernier terme du second membre qui représente l'**accélération de Coriolis ou accélération complémentaire** $\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge V_{M/R'}$. Elle n'existe que si le point M est en mouvement dans R' et si R' est un référentiel en rotation par rapport à R ;
- le terme intermédiaire qui représente l'**accélération d'entraînement** \vec{a}_e . Cette accélération correspondrait à l'accélération qu'aurait le point M par rapport à R s'il était fixe dans R' . Dans ce cas les accélérations relative et complémentaire sont nulles.

Chapitre II : Dynamique (4 semaines)

1. Généralité :

1.1 Masse: La masse d'un système caractérise la quantité de matière qu'il renferme. Elle est invariable dans le cadre de la mécanique Newtonienne. C'est une caractéristique du système. Dans le système international d'unités, l'unité de masse est le kilogramme (Kg).

1.2 Vecteur quantité de mouvement : Le vecteur quantité de mouvement (noté \vec{P}) d'un point matériel de masse m se déplaçant avec une vitesse dans un référentiel donné est défini par : $\vec{P} = m \vec{v}$

L'unité de la quantité de mouvement dans le système international est le Kgms^{-1} .

1.3 Force :

a) **Force de gravitation newtonienne :** c'est une force d'interaction à distance, On appelle force de gravitation ou force d'interaction gravitationnelle, la force exercée par une masse M sur une autre masse m . Elle s'énonce de la façon suivante:

Les masses de deux corps s'attirent en raison de leurs masses et de l'inverse du carré de leur distance selon une direction qui passe par leurs centres de masses.

La loi d'attraction universelle s'exprime analytiquement de la façon suivante :

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = -G \frac{mM}{d^2} \vec{u}$$

Remarque :

La force d'interaction d'une charge Q placée en A sur une charge q placée en B (*force de Coulomb*), La force que subit une charge électrique placée dans des champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} (Force de Lorentz), sont aussi des forces d'interactions à distance.

- b) **Réaction du support** La force que subit un objet posé sur un support horizontal en provenance du support s'appelle **réaction du support**. On peut représenter cette action par une force, résultante de toutes les actions exercées sur toute cette surface.
- c) **Forces de frottement** la force de frottement s'oppose au déplacement que l'on cherche à engendrer. Il importe de distinguer deux types de frottement : le frottement visqueux (contact solide-fluide) et le frottement solide (contact solide-solide).
- d) **Forces de tension** Lorsqu'un opérateur tire sur une extrémité d'un fil celui-ci se tend. Simultanément, le fil exerce une résistance, c'est-à-dire une action sur l'opérateur. Cette action du fil sur l'opérateur est appelée **tension du fil**.

1.4 Moment d'une force :

Considérons un solide en rotation autour d'un axe fixe et soumis à une force \vec{F} dont le point d'application est en P (FIG.21). Par définition, le moment de la force par rapport à O est

donné par : $\vec{M}_{\vec{F}/O} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$

Le moment d'une force est donc un vecteur perpendiculaire à la fois à la force \vec{F} et à \overrightarrow{OP} . La direction et le sens de ce vecteur donnent le sens de rotation que produira l'action de la force \vec{F} autour de l'axe.

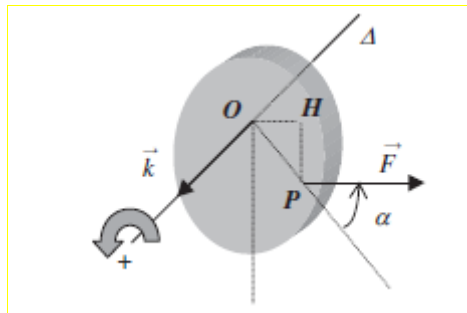


FIG.21 Représentation du moment d'une force par rapport à O .

2. Les lois de Newton :

2.1 La première loi de Newton (Principe d'inertie)

Dans un référentiel (R) galiléen, le centre d'inertie de tout système matériel mécaniquement isolé (ou pseudo isolé), est soit au repos soit en mouvement rectiligne uniforme. Ce principe conduit à la loi de conservation de la quantité de mouvement totale d'un système isolé ou pseudo isolé.

$$\vec{v}_G = \overrightarrow{cste} \Rightarrow \vec{p} = m\vec{v}_G = \overrightarrow{cste} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$

Remarque

Référentiels galiléens :

Nous avons déjà vu que la notion de mouvement ou de repos dépendait du choix du référentiel. Le principe d'inertie ne s'applique donc que dans certains référentiels dit galiléens. On appelle référentiel galiléen, un référentiel dans lequel le principe d'inertie s'applique.

2.2. Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen

a) Énoncé de la deuxième loi de Newton (Principe fondamental de la dynamique)

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement du système.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Le vecteur quantité de mouvement du système correspond au vecteur vitesse du centre d'inertie du système multiplié par la masse totale. La masse étant un invariant il est possible de donner une autre forme à ce principe. Il en résulte que la relation fondamentale de la dynamique ou **RFD** peut s'écrire sous la forme : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

b) Théorème du centre d'inertie

Dans un référentiel galiléen, le mouvement du centre d'inertie d'un système matériel est le même que celui d'un point matériel coïncidant avec ce centre, point qui aurait comme la masse totale du système et auquel on appliquerait la somme des forces agissant sur le système.

Par la suite, nous ne nous intéresserons qu'au mouvement du centre d'inertie d'un système (correspondant au mouvement d'ensemble du système). Toutes les forces extérieures appliquées au système seront donc représentées en ce point (voir **FIG. 22**).

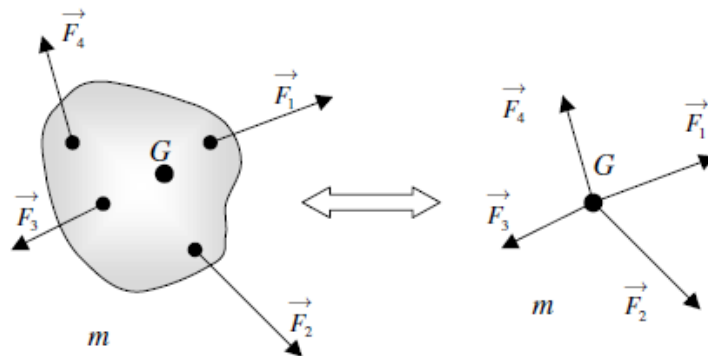


FIG. 22 Théorème du centre d'inertie. Le mouvement de translation du système se ramène à celui de son centre d'inertie G auquel on applique toutes les forces.

2.2 La 3^{ème} loi de Newton (Principe de l'action réciproque)

Le principe des actions réciproques, ou principe de l'action et de la réaction, a été énoncé par Newton (troisième loi de Newton).

Lorsque deux systèmes $S1$ et $S2$ sont en interaction, quel que soit le référentiel d'étude et quel que soit leur mouvement (ou l'absence de mouvement), l'action du système $S1$ sur le système $S2$ est exactement opposée à l'action simultanée du système $S2$ sur le système $S1$, donc :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

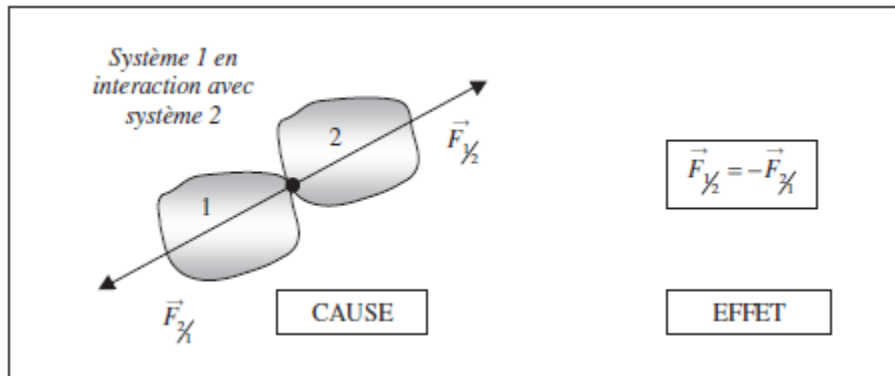


FIG. 23 • Illustration du principe des actions réciproques.

Ce principe est universel. Il s'applique aussi bien aux interactions à distance qu'aux interactions de contact, à l'échelle de l'Univers comme à l'échelle des particules.

3. Moment cinétique

Considérons un point matériel M en rotation autour d'un point fixe dans le référentiel galiléen $R(O, x, y, z)$. Sa vitesse, dans ce référentiel, est notée \vec{v} . On appelle moment cinétique du point M par rapport à un point fixe O , le moment par rapport à O de sa quantité de mouvement c'est-à-dire:

$$\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = mlv\vec{U}_z = ml^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{U}_z = I_\Delta \dot{\theta} \vec{U}_z$$

Par définition le moment d'inertie du point matériel M distant de l de l'axe de rotation est égal au produit de la masse de ce point par le carré de la distance à l'axe de rotation : $I_\Delta = ml^2$

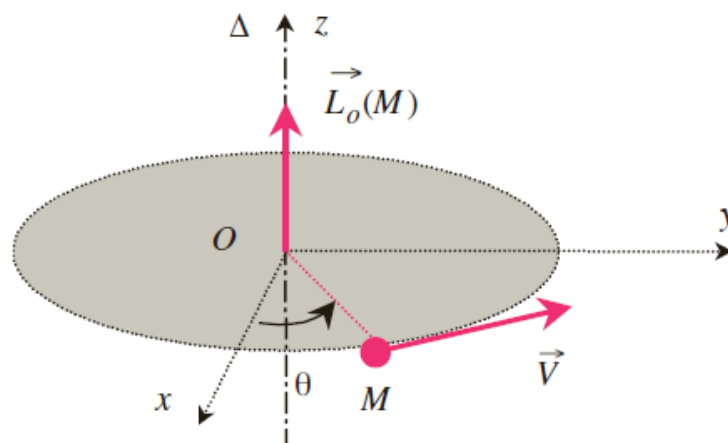


FIG. 24 Moment cinétique par rapport au point O d'un point M en mouvement autour de O .

Théorème du moment cinétique :

Dans un référentiel galiléen, la dérivée du moment cinétique par rapport à un point fixe O d'un point matériel est égale à la somme des moments des forces extérieures appliquées à ce point.

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d(\overline{OM} \wedge m\vec{v})}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \overline{OM} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Il en résulte que la dérivée du moment cinétique est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport au point O :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \overline{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \sum \overline{M}_0(\vec{F}_{ext})$$

4. Application

4.1. Mouvement rectiligne uniformément varié

Étude dynamique: Le bilan des forces se résume à un ensemble de forces dont la résultante \vec{F} est constante. Le principe fondamental de la dynamique conduit à

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = \vec{F}$$

Étude cinématique: En projection sur la direction du mouvement nous avons

$$a = \frac{F}{m} = cste$$

Les conditions initiales étant à $t = 0$, $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$ et $OM = x_0$, nous avons

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} \Rightarrow \dot{x} = \frac{F}{m}t + v_0$$

ce qui conduit à l'équation horaire :

$$x = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + v_0 t + x_0$$

4.2. Mouvement circulaire uniformément varié

Étude dynamique: Le bilan des forces se résume à un ensemble de forces dont le moment résultant par rapport à un point fixe O est constant. L'application du théorème du moment cinétique conduit à :

$$I_{\Delta} \ddot{\theta} = \sum M_{F_{ext}/\Delta} = cste = F.d \text{ (avec } d = OM \text{ et } \vec{F} \perp \overline{OM}\text{)}$$

Étude cinématique: Nous avons donc

$$\ddot{\theta} = \frac{F.d}{m.d^2} = \frac{F}{m.d} = cste$$

En considérant qu'à $t = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0, \theta(0) = \theta_0$ il vient

$$\dot{\theta} = \frac{F}{m.d}t + \dot{\theta}_0$$

ce qui conduit à l'équation horaire suivante :

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{F}{m.d} t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

4.3. Chute freinée d'un corps

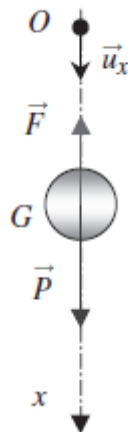
Nous faisons l'hypothèse que le corps de masse m est freiné au cours de sa chute par une force de frottement de type visqueux. Nous étudions le problème dans un référentiel terrestre supposé galiléen. La chute se faisant sur un seul axe, on se limite à un vecteur de base. On supposera que la masse m chute sans vitesse initiale d'une position $x = 0$ à $t = 0$.

Système étudié : le système masse m .

Référentiel d'étude : $R(O, x, t)$ supposé galiléen (vecteur unitaire \vec{i}).

Les forces extérieures appliquées sont :

- le poids \vec{P} ;
- la force de frottement $\vec{F} = -k v_0 \vec{i}$



L'application de la relation fondamentale de la dynamique conduit à :

$$m \frac{d\vec{v}_{G/R}}{dt} = \vec{P} + \vec{F} = \vec{P} - k\vec{v}_{G/R}$$

L'équation différentielle du mouvement de la masse m s'écrit donc :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{k}{m} \vec{v} = \vec{g}$$

ce qui, en projection sur l'axe x du mouvement, conduit à :

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{k}{m} v_x = g$$

Cette équation est une équation différentielle du premier degré à coefficients et second membre constants. La méthode de résolution consiste à calculer une solution de l'équation sans second membre et y ajouter une solution particulière indépendante du temps.

L'équation sans second membre s'écrit :

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{k}{m} v_x = 0 \Rightarrow \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m} dt$$

$$\ln v_x = -\frac{k}{m} t + cste = -\frac{k}{m} t + \ln C$$

Il en résulte que la vitesse du mobile varie exponentiellement selon une loi du type :

$$v_x = C e^{-\frac{k}{m} t}$$

On recherche une solution particulière de l'équation différentielle ne dépendant pas du temps. On a donc :

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = \frac{mg}{k}$$

La solution générale de cette équation s'écrit donc :

$$v_x = \frac{mg}{k} + C e^{-\frac{k}{m} t}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la constante C en revenant aux conditions aux limites de ce mouvement qui impose que $v = 0$ à $t = 0$. Il vient donc :

$$C + \frac{mg}{k} = 0 \Rightarrow C = -\frac{mg}{k}$$

ce qui conduit à :

$$v_x = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m} t})$$

On peut ainsi constater que la vitesse augmente progressivement pour atteindre une vitesse limite lorsque le temps tend vers l'infini. La vitesse limite de chute, qui logiquement n'est jamais atteinte, est donnée par :

$$v_{\text{lim}} = \frac{mg}{k}$$

$$x = \frac{mg}{k} \left(t + \frac{mg}{k} \left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1 \right) \right)$$

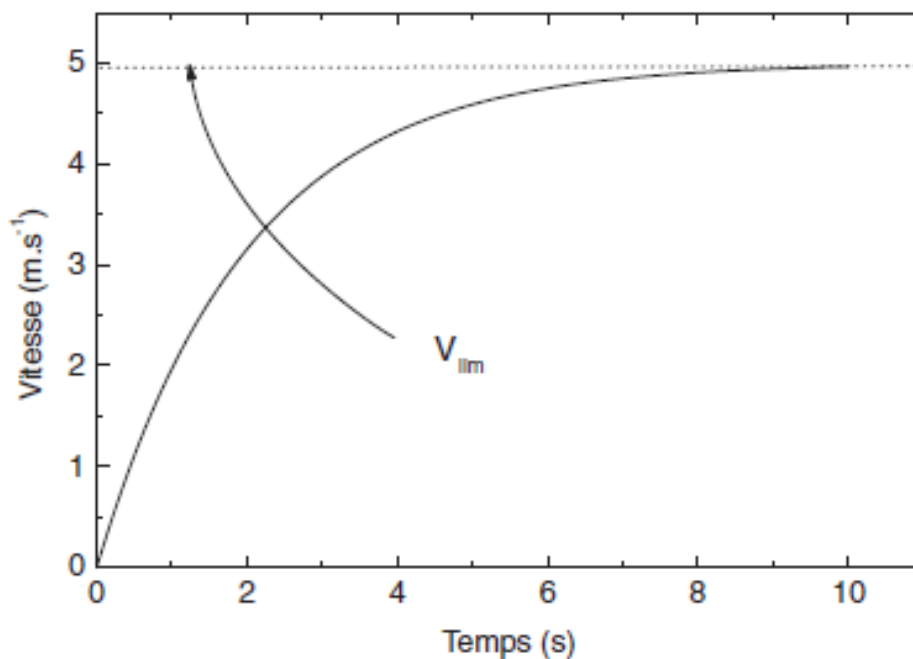


FIG. 25 Évolution avec le temps de la vitesse dans le cas d'une chute avec frottements visqueux.

b) Pendule simple

Considérons une masse m mobile autour d'un axe fixe. La distance de la masse m à l'axe de rotation est appelée l (**FIG. 25**). On considère le mouvement du système masse m par rapport à un référentiel galiléen $R(O, x, y, z, t)$. La base choisie est la base mobile $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta)$. Les forces extérieures appliquées sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension \vec{T} du fil. La relation fondamentale de la dynamique conduit à :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_{G/R} \Rightarrow m(-l\dot{\theta}^2 \vec{U}_\rho + l\ddot{\theta} \vec{U}_\theta) = \vec{P} + \vec{T}$$

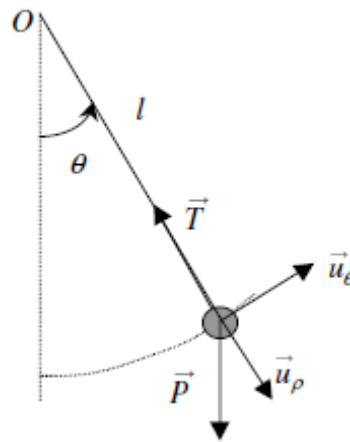


FIG. 25 Représentation d'un pendule simple.

En projection sur les vecteurs de base, le poids et la tension s'écrivent :

$$\vec{P} \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{T} \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{cases} mg \cos \theta - T = -ml \dot{\theta}^2 \\ -mg \sin \theta = ml \ddot{\theta} \end{cases}$$

De la seconde équation, il est possible d'écrire l'équation différentielle du mouvement de la masse m :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Cette équation est une équation différentielle *non linéaire* à cause de la présence du terme en sinus. La solution n'est donc pas facile à obtenir sauf si dans certaines conditions l'équation peut être assimilée à une équation linéaire. Cette condition est satisfaite dans le cas où l'angle θ est petit, c'est-à-dire lorsque le sinus est assimilable à l'angle, soit $\sin \theta \approx \theta$. Dans ce cas, l'équation

différentielle devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. La solution de cette équation s'écrit :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

à condition de poser $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

L'équation différentielle précédente aurait pu être obtenue directement par le théorème des moments calculés en O , soit :

$$ml^2 \ddot{\theta} \vec{U}_z = \vec{M}_{\vec{P}/O} + \vec{M}_{\vec{T}/O} = \vec{M}_{\vec{P}/O} ; ml^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$$

Chapitre III : Travail et énergie (4 semaines)

1. Travail d'une force :

1.1. Travail d'une force constante sur un déplacement rectiligne

Lorsqu'on applique une force pour déplacer un objet G, l'effort qu'il faut fournir est d'autant plus important que la longueur du déplacement est grande et que la force appliquée est intense. Le travail de la force est une grandeur qui va rendre compte de cet effort. Le travail de la force \vec{F} sur le déplacement AB se définit comme le produit scalaire du vecteur force par le vecteur déplacement.

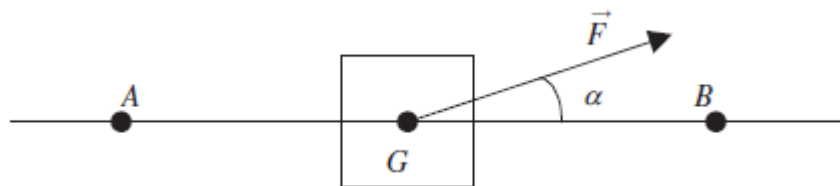


FIG. 26 : Déplacement du point d'application d'une force sur un chemin rectiligne.

On a donc :

$$\vec{F} = \overline{cste} \text{ sur } \overline{AB} \Rightarrow \begin{cases} W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overline{AB} \\ W_{AB}(\vec{F}) = F \cdot AB \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

L'angle α est l'angle que fait le vecteur force \vec{F} avec le vecteur déplacement \overline{AB} .

Le travail est soit positif, nul ou négatif selon la direction de la force \vec{F} par rapport au déplacement.

Si \vec{F} est perpendiculaire à AB le travail est nul, la force \vec{F} ne contribuant pas à déplacer l'objet.

Lorsque la force s'oppose au déplacement, elle est **résistante** et le travail est négatif. Lorsque la force est **motrice** le travail est positif. Le travail s'exprime en joules (symbole J).

1.2. Travail élémentaire

Dans le cas où la force \vec{F} varie au cours du déplacement qui peut être quelconque, il n'est plus possible d'utiliser l'expression précédente. En effet la force peut changer l'orientation et d'intensité sur le déplacement considéré. Pour calculer le travail, on décompose alors le trajet AB en une succession de *déplacements élémentaires* $\overline{dl} = \overline{MM'}$, infiniment petits et donc rectilignes (**FIG. 27**).

Sur l'un quelconque de ces trajets élémentaires, le vecteur force \vec{F} peut être considéré comme constant et la définition précédente (paragraphe 1.1.) peut s'appliquer. L'expression du *travail élémentaire* sur un tel déplacement élémentaire peut donc s'écrire : $dW_{M \rightarrow M'}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overline{dl}$

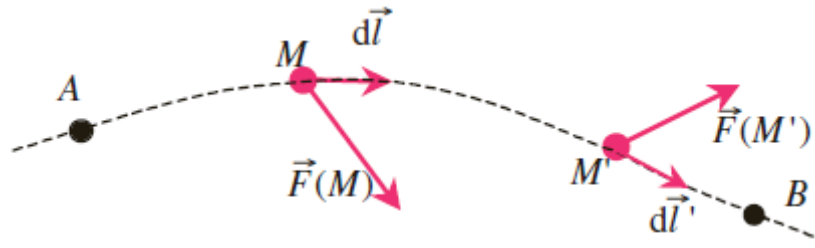


FIG .27 :Déplacement d'une force constante

Pour obtenir le travail $W_{AB}(\vec{F})$ de la force $\vec{F}(M)$ sur le déplacement de A à B, il suffit d'additionner tous les travaux élémentaires entre le point de départ et le point d'arrivée. Cette sommation contenant une infinité de terme tous infiniment petits correspond à une intégration entre les points A et B .

1.3. Force variable sur un déplacement quelconque

Pour obtenir le travail total de la force sur le déplacement total AB, il suffit d'additionner les travaux élémentaires quand on passe du point A au point B. La sommation est continue, ce qui conduit à :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}(M) \cdot d\vec{l}$$

2. Exemples de calcul du travail

2.1. Travail d'une force constante : poids d'un corps.

Dans le cas où le vecteur force reste constant (en norme, direction et sens) au cours du déplacement de son point d'application comme l'indique la **figure 28**, l'expression du travail de cette force se simplifie. Il en effet possible de sortir ce vecteur de l'intégrale, ce qui conduit à :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \int_A^B d\vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

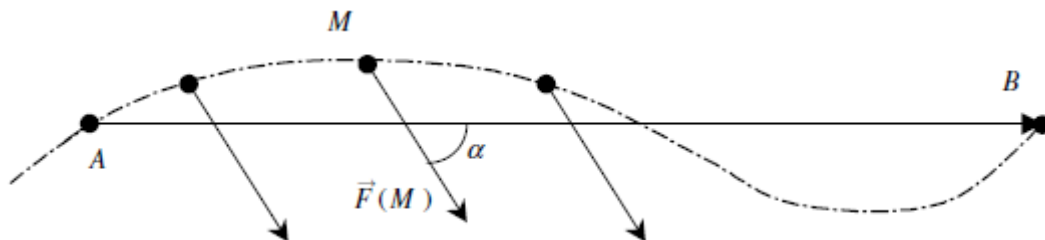


FIG. 28 : Déplacement d'une force constante.

On constate alors que le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale (A) et finale (B).

$$F = cste \Rightarrow W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

2.2. Travail d'une force élastique

Considérons un ressort de raideur k , de longueur au repos l_0 , au bout duquel est accrochée une masse m comme l'indique la **figure 29**. Le ressort et la masse sont sur un plan horizontal et nous nous intéressons uniquement à la tension du ressort.

La force élastique \vec{T} , c'est-à-dire la force de tension du ressort, est une force qui varie avec l'état d'étirement du ressort k . Ce n'est donc pas une force constante au cours du déplacement. Pour calculer le travail de cette force il nous faut calculer le travail élémentaire de cette force sur un déplacement infiniment petit sur lequel nous considérerons que la force est constante.

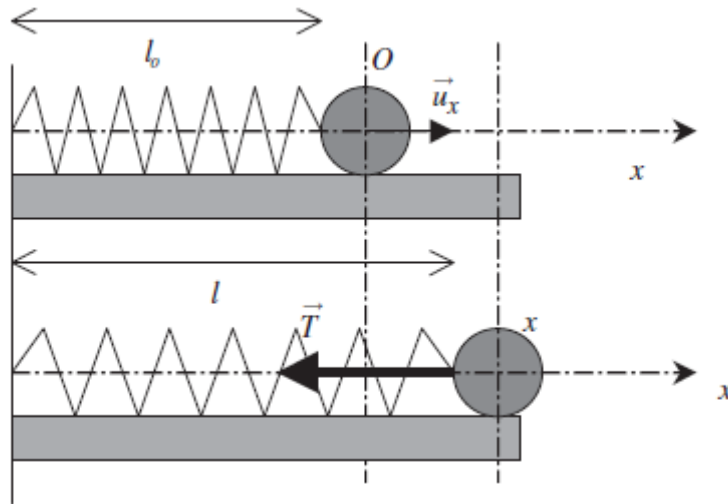


FIG. 29 : Illustration de la force de tension d'un ressort.

cette force sur un déplacement infiniment petit sur lequel nous considérerons que la force est constante.

Avec les conventions d'orientation des vecteurs de la **figure 29**, la tension s'exprime de la façon suivante :

$$\vec{T} = -k \cdot \Delta l \cdot \vec{U}_x = -k \cdot (l - l_0) \cdot \vec{U}_x = -k \cdot x \cdot \vec{U}_x$$

Le travail élémentaire de la force élastique \vec{T} , lorsque la masse passe d'une position x à une position $x + dx$, est donc donné par :

$$dW_{x \rightarrow x+dx}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot d\vec{l} = -k \cdot x \cdot \vec{U}_x \cdot dx = -k \cdot x \cdot dx = -d\left(\frac{1}{2} k \cdot x^2\right)$$

Lorsque le point d'application passe d'une position x_1 à une position x_2 , le travail de la force élastique est donc :

$$W_{x_1 \rightarrow x_2}(\vec{T}) = \int_{x_1}^{x_2} \vec{T} \cdot d\vec{l} = \int_{x_1}^{x_2} -k \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2)$$

Nous remarquons que le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale et finale du ressort. Le travail élémentaire correspond là aussi à l'opposé de la différentielle d'une fonction qui est $\frac{1}{2}k.x^2 + cste$.

2.3. Travail de la force de Lorentz

Considérons une particule de charge q se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans un champ magnétique \vec{B} . La force magnétique subie par la particule est la force de Lorentz donnée par :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Le travail élémentaire de cette force, au cours d'un déplacement sur sa trajectoire, est donné par :

$$dW = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0$$

Il est toujours nul car le déplacement élémentaire de la particule est toujours perpendiculaire à la force \vec{F} . On peut donc conclure que la force de Lorentz ne travaille pas sur sa trajectoire.

3. PUISSANCE D'UNE FORCE

En introduisant la définition du travail élémentaire d'une force effectué entre les instant t et $t + dt$, il est possible de définir une puissance instantanée $P(t)$ par :

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Cette grandeur s'exprime dans le système international d'unités en Watts en utilisant le symbole W . Il est donc clair que le travail élémentaire peut aussi s'exprimer à partir de la puissance de la force et s'écrire :

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = P(t) dt$$

ce qui conduit à l'expression suivante du travail d'une force

$$W_{1 \rightarrow 2}(\vec{F}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$$

4. ÉNERGIE

4.1. Énergie cinétique : théorème

Considérons un point matériel G se déplaçant, dans un référentiel galiléen R , sous l'action d'un ensemble de forces extérieures. Le mouvement de ce point est régi par le principe fondamentale de la dynamique, soit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_{G/R} = m \cdot \frac{d\vec{v}_{G/R}}{dt}$$

Au cours d'un déplacement élémentaire \vec{dl} , la somme des travaux élémentaires des forces extérieures est donnée par :

$$\sum \vec{F}_{ext} \cdot \vec{dl} = m \cdot \frac{d\vec{v}_G}{dt} \cdot \vec{dl} = m \cdot \vec{v}_G \cdot d\vec{v}_G$$

Par intégration de cette relation sur un trajet AB nous obtenons :

$$m \int_{v_A}^{v_B} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \sum \int_A^B \vec{F}_{ext} \cdot \vec{dl} = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext})$$

Soit

$$\frac{1}{2} \cdot m(v_B^2 - v_A^2) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext})$$

D'après la dernière équation, on voit qu'il est intéressant de définir une fonction d'état, ne dépendant que de la vitesse du point, appelée **énergie cinétique**.

Pour un point matériel de masse m se déplaçant à la vitesse v dans un référentiel R galiléen, nous poserons que l'énergie cinétique de ce point est $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

Dans ces conditions, nous observons que la variation d'énergie cinétique du point matériel entre deux positions est égale au travail de toutes les forces appliquées sur ce point, ce qui constitue un théorème appelé **théorème de l'énergie cinétique**.

Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position A et une position B est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points.

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext})$$

4.2. Énergie potentielle

a) Forces conservatives

• *Les forces conservatives* qui sont les forces dont le travail ne dépend pas du chemin suivi mais que du point de départ et du point d'arrivée. On peut citer comme exemples:

- Travail du poids
- Travail de la tension du ressort
- Travail d'une force constante (en norme et en direction)

• *Les forces non conservatives* dont le travail dépend du chemin suivi, comme par exemple les forces de frottement. Si l'on considère une force de frottement solide $\vec{F} = -K \frac{\vec{dl}}{dl}$ de norme constante K , celle-ci s'oppose constamment au déplacement. On aura donc :

$$dW = -K \frac{\vec{dl}}{dl} \cdot \vec{dl} = -K dl$$

ce qui conduit à

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = -K \int_A^B dl = -K \cdot AB$$

Ce travail de la force de frottement solide dépend donc du chemin suivi.

b) Énergie potentielle

Par définition, le travail des forces conservatives ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial et final. Le travail de ces forces peut donc s'exprimer à partir d'une **fonction d'état** appelée **énergie potentielle** E_p . Pour des raisons qui apparaîtront clairement au paragraphe 4.3., nous conviendrons que la variation d'énergie potentielle est représentée par l'opposé du travail des forces conservatives soit :

$$E_p(B) - E_p(A) = -W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^C)$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\Delta E_p = -W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^C)$$

Cette relation conduit, à la *définition intégrale* de l'énergie potentielle:

$$E_p(B) - E_p(A) = -\int_A^B \vec{F}_{ext}^C \cdot \vec{dl}$$

Finalement la différentielle de l'énergie potentielle peut s'exprimer en fonction du gradient de E_p

$$dE_p = -\overrightarrow{grad} E_p \cdot \vec{dl}$$

On aboutit à la *définition locale* de l'énergie potentielle :

$$\overrightarrow{grad} E_p = -\vec{F}_{ext}^c$$

c) Exemples d'énergie potentielle :

c).1 Energie potentielle de pesanteur

Nous avons avec l'axe Oz , axe vertical ascendant :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = m \cdot g (z_A - z_B) = E_{P_p}(A) - E_{P_p}(B)$$

Par comparaison avec la relation intégrale, il apparaît clairement que nous pouvons définir la fonction énergie potentielle de pesanteur $E_{p_p}(z)$ par Cette fonction est définie à une constante C près qu'il convient de fixer. La détermination de cette constante se fait par le choix arbitraire du zéro de la fonction énergie potentielle. En général, l'énergie potentielle de pesanteur est prise nulle en $z = 0$ ce qui impose $C = 0$. Ce choix entraîne que :

$$E_{p_p}(z) = m.g.z$$

c).2 Energie potentielle élastique

En reprenant les résultats obtenus à l'équation, nous voyons que :

$$dW_{x \rightarrow x+dx}(T) = \vec{T} \cdot \vec{dl} = -k.x.dx = -d\left(\frac{1}{2}.k.x^2\right) = -d(E_{p_p})$$

ou encore :

$$W_{x_1 \rightarrow x_2}(\vec{T}) = -k \int_{x_1}^{x_2} x.dx = \frac{1}{2}.k(x_1^2 - x_2^2)$$

L'énergie potentielle élastique E_{p_e} correspond donc à :

$$E_{p_e} = \frac{1}{2}.k.x^2$$

L'énergie potentielle du ressort déformé correspond donc à l'énergie qu'un opérateur (l'extérieur du système) a fournie pour l'amener dans cet état. Le ressort a emmagasinée cette énergie qu'il pourra restituer en retournant vers son état à vide, ni étiré, ni allongé.

5. Energie mécanique

L'énergie mécanique d'un système est égale à la somme des énergies cinétique et potentielle. C'est une fonction d'état : $E = E_c + E_p$.

La variation d'énergie mécanique d'un système entre deux points A et B est égale à la somme des travaux des forces non conservatives appliquées au système entre ces deux points.

$$\Delta E = E(B) - E(A) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^{NC})$$

Théorème de l'énergie mécanique

La variation d'énergie mécanique d'un système entre deux points A et B est égale la somme des travaux des forces extérieures non-conservatives appliquées à ce système.

-Les forces non conservatives étant des forces résistantes, l'énergie mécanique d'un système ne peut que diminuer au cours du temps. Cependant, lorsqu'un système est mécaniquement isolé, (c'est-à-dire pour un système qui ne subit aucune force extérieure non conservative), l'énergie mécanique se conserve. L'énergie mécanique ne dépend plus du point considéré.

$$\text{Système mécaniquement isolé} \Leftrightarrow E = cste$$

Exemple d'utilisation de l'énergie pour la résolution d'un problème physique :

Considérons le cas d'une bille M de masse m située à l'altitude $z_A = h$ et qu'on lâche sans donner de vitesse initiale. Trouver la vitesse de cette bille lorsqu'elle touche le sol, en B l'altitude $z_B = 0$.

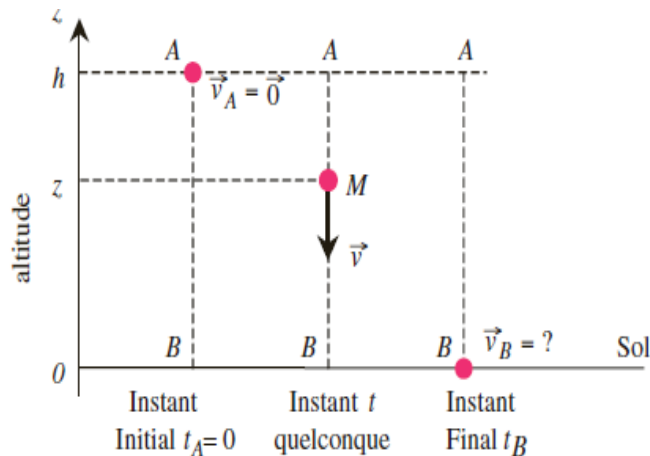
-Déterminer sa vitesse v en fonction de son altitude z .

Système : la bille M de masse m

➤ Référentiel terrestre galiléen. Choix d'un repère : axe vertical ascendant avec le point B au sol (altitude $z_B = 0$) et le point A à l'altitude $z_A = h$.

➤ Bilan des forces : uniquement le poids de la bille $\vec{P} = m \vec{g}$: (on néglige les frottements).

Le poids est une force conservative qui dérive d'une énergie potentielle. Avec un axe vertical ascendant on a : $E_{PP} = mgz$ avec l'énergie potentielle nulle au sol ($E_{PP}(B) = E_{PP}(z_B = 0) = 0$)



a) Calcul en utilisant le théorème de l'énergie cinétique

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les positions A de départ et B d'arrivée.

Le travail du poids s'écrit

$$W_{AB}(\vec{P}) = m.g(z_A - z_B) = m.g.h$$

La variation d'énergie cinétique (énergie cinétique finale – énergie cinétique initiale) s'écrit :

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \frac{1}{2}.m.v_B^2 - \frac{1}{2}.m.v_A^2 = \frac{1}{2}.m.v_B^2$$

Théorème de l'énergie cinétique :

$$W_{AB}(\vec{P}) = \Delta E_C = E_C(B) - E_C(A)$$

$$\frac{1}{2}.m.v_B^2 = m.g.h \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$$

L'application du théorème entre la position A et une position intermédiaire quelconque en M donne :

➤ Le travail du poids s'écrit :

$$W_{AB}(\vec{P}) = mg(z_A - z) = mg(h - z)$$

➤ La variation d'énergie cinétique s'écrit :

$$\Delta E_C = E_C(M) - E_C(A) = \frac{1}{2}mv^2$$

➤ Théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h - z) \Rightarrow v = \sqrt{2g(h - z)}$$

b) Calcul en utilisant la conservation de l'énergie

Le système est conservatif donc il y a conservation de l'énergie mécanique. Exprimons cette énergie au différents points A , M et B :

➤ Point A : $E(A) = E_C(A) + E_{PP}(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A = mgh$

➤ Point M : $E(M) = E_C(M) + E_{PP}(M) = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$

➤ Point B : $E(B) = E_C(B) + E_{PP}(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B = \frac{1}{2}mv_B^2$

La conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$E(A) = E(M) = E(B) = E_0 \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$$

On en déduit :

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgz \Rightarrow v = \sqrt{2g(h - z)}$$

Exemple d'application

Un bateau de masse m ayant atteint sa vitesse de déplacement v_0 , coupe ses moteurs à l'instant $t = 0$. L'eau exerce une force de frottement proportionnelle à la vitesse v du bateau.

1) À l'aide de la relation fondamentale de la dynamique, donner l'expression de la vitesse en fonction du temps. Où le bateau s'arrêtera-t-il ?

2) Quel est le travail effectué par la force de frottement entre l'instant où le bateau coupe ses moteurs et celui où il s'arrête ? Le comparer à l'énergie cinétique du bateau à l'instant $t = 0$.

Solution

1) On considère le système bateau dans le référentiel galiléen R . Les forces extérieures appliquées au bateau sont :

- \vec{P} le poids du bateau ;
- \vec{R} la poussée de l'eau sur le bateau ;
- \vec{f} la force de frottement.

Le principe fondamental de la dynamique donne : $m\vec{a}_{G/R} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}$, ce qui conduit par projection

dans la direction x d'avancée du bateau à : $m \frac{dv_x}{dt} = -kv_x$

On en conclut que : $\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m} dt \Rightarrow \ln v_x = -\frac{k}{m}t + C$

Les conditions initiales du mouvement imposent que :

$$C = \ln v_0 \Rightarrow \ln \frac{v_x}{v_0} = -\frac{k}{m}t \Rightarrow v_x = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

Pour trouver la position d'arrêt, il faut intégrer la vitesse, soit :

$$x = \int v_x dt = v_0 \int e^{-\frac{k}{m}t} dt = -\frac{v_0}{k} e^{-\frac{k}{m}t} + C_2$$

À l'instant $t=0$ le bateau était en $x=0$, donc :

$$C_2 = \frac{v_0}{k} \Rightarrow x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

Le bateau s'arrêtera au bout d'un temps infini à la position : $x_0 = \frac{v_0}{k}$

2) Par définition, le travail de la force de frottement est donné par :

$$W_{1 \rightarrow 2}(\vec{f}) = \int_1^2 \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{f} \cdot \vec{v} dt \Rightarrow W_{1 \rightarrow 2}(\vec{f}) = -k.v_0^2 \int_{t_1}^{t_2} e^{-2\frac{k}{m}t} dt$$

soit, entre l'origine des temps et l'infini :

$$W_{1 \rightarrow 2}(\vec{f}) = k.v_0^2 \cdot \frac{m}{2k} \left[e^{-2\frac{k}{m}t} \right]_0^\infty = -\frac{1}{2} m.v_0^2$$

ce qui représente l'opposé de l'énergie cinétique de départ (Ceci est logique dans la mesure où seule la force de frottement travaille).