

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université Ferhat Abbas de Sétif 1



Polycopié de cours

Module : Physique 2

Présentée à la faculté des sciences
Département de Physique

Par

REFFAS Mounir

2019

SOMMAIRE

CHAPITRE 1.....	1
Rappels mathématiques.....	1
1.1. Représentation d'un point dans l'espace.....	1
1.2. Angle solide.....	2
- Angle solide élémentaire.....	2
1.3. Operateurs vectoriels.....	3
1.3.1 Gradient.....	3
1.3.2 Divergence.....	4
Coordonnées cartésiennes	4
Coordonnées cylindriques :.....	5
Coordonnées sphériques :.....	5
1.3.3 Rotationnel	5
Coordonnées cartésiennes :.....	5
Coordonnées cylindriques :.....	5
Coordonnées sphériques :.....	6
1.3.4 Laplacien	7
4 Relations vectorielles	8
CHAPITRE 2 :	10
ÉLECTROSTATIQUE	10
2.1. Charges électriques	10
2.2. Loi de coulomb.....	11
2. 3. Champ et potentiel	12
2.3.1 Cas d'une charge ponctuelle	12
2.3.2 Cas d'un système de charges.....	13

3. Force et Energie Potentielle Electrostatiques.....	14
3 .1 Force électrostatiques.....	14
3 .2 Energie potentielle d'un système de charges	15
Cas d'une distribution de charges ponctuelles.....	15
Cas d'une distribution continue de charges	16
4. Exemples d'applications	16
3) Calcul du champ à partir du potentiel.....	20
5. Dipôle électrostatique.....	21
5.1 Calcul du potentiel à grande distance.....	21
5.2 Calcul du champ électrique à grande distance	23
5. 3 Mouvement du dipôle dans un champ E uniforme	24
Chapitre 3	25
Théorème de Gauss :.....	25
3.1. Flux du Champ Electric Créé par une Charge Ponctuelle	25
3.2. Théorème de Gauss	27
3.3. Loi locale et loi intégrale.....	27
3.4. Conservation du flux le long d'un tube de champ	28
3.6. Conditions de passage à l'interface entre deux distributions de charges différentes.....	29
Chapitre 4 :	35
Conducteurs en équilibre.....	35
4.1. Loi de conservation de la charge.....	35
4.2. Corps conducteurs et corps isolants	35
4.3 Equilibre électrostatique :.....	36
Théorème de coulomb.....	36

Corps conducteur neutre.....	36
Corps conducteur chargé.....	37
4.4. Pression électrostatique.....	38
4.5. Influence de deux conducteurs chargés.....	39
Théorème de Faraday.....	39
4.5.1 Influence partielle.....	39
4.5.2 Influence totale.....	40
4.6. Capacité d'un conducteur unique.....	41
4.7. Système de n conducteurs en équilibre.....	42
* Cas particulier d'un système de deux conducteurs en influence totale :	44
4.8. Capacité d'un condensateur.....	44
*Condensateur sphérique.....	45
*Condensateur plan.....	46
4.9. Association de condensateurs.....	46
4.9.2 Association en parallèle.....	47
Chapitre 5.....	49
Electrocinétique.....	49
5.1. Les charges mobiles.....	49
5.2. Courant électrique.....	49
5.2.1 Vecteur densité de courant.....	49
5.2.2 L'intensité du courant électrique.....	49
b) Conducteurs massifs cylindriques.....	51
c) Nappe de courant.....	51
5.3. Équation de continuité.....	51
* Cas particulier d'un régime stationnaire.....	53

5.4. Conductivité électrique : loi d'ohm locale	54
5.4.1 Premier modèle.....	54
5.4.2 Second modèle	55
5.4.3 La mobilité des porteurs	56
5.4.4 Résistivité électrique	56
5.4.5 Ordres de grandeurs	56
5.5. Résistance électrique :	57
Loi d'Ohm macroscopique.....	57
5.6. Association de résistances	58
5.6.1 Résistances en série.....	58
5.6.2 Résistances en parallèle.....	59
5.7. Rôle du générateur : force électromotrice	59
5.8. Les lois de kirchhoff.....	60
* Première loi	60
*Deuxième loi	60
5.9. Aspect énergétique : loi de joule	62
Chapitre 6	63
Electromagnétisme	63
6.1 Introduction	63
6. 2 Le champ magnétique	64
6. 4 Dipôle magnétique	65
6. 4. 1 Moment magnétique \vec{m} d'un dipôle.....	65
6. 4. 2 Potentiel et champ créés par un dipôle magnétique.....	66

CHAPITRE 1 :

Rappels mathématiques

1.1. REPRÉSENTATION D'UN POINT DANS L'ESPACE

On se placera toujours dans un repère orthonormé $Oxyz$, de vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.

1.1.1 Coordonnées cartésiennes

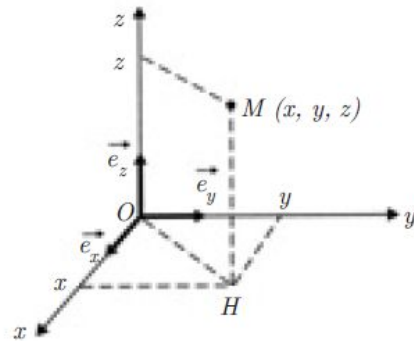
$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Si M se déplace, on a :

$$d\overrightarrow{OM} = d\vec{M} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$(d\overrightarrow{OM})^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$



1.1.2 Coordonnées cylindriques

Vecteurs unitaires : $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$;

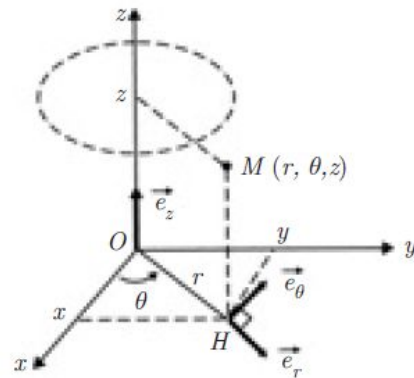
On définit M par sa coordonnée z et par les coordonnées polaires r, θ de son projeté sur le plan xOy .

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{OM}^2 = r^2 + z^2$$

$$(d\overrightarrow{OM})^2 = dr^2 + (r d\theta)^2 + dz^2$$



1.1.3 Coordonnées sphériques

Vecteurs unitaires : $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$.

On définit M par la longueur

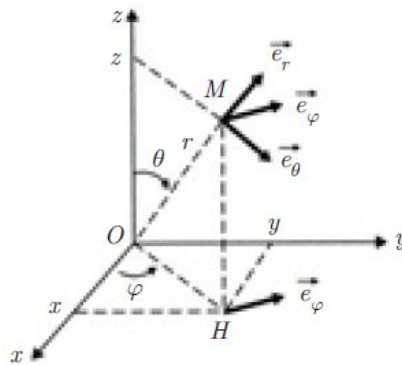
$r = OM$ et les deux angles φ et θ .

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi + r d\theta \vec{e}_\theta$$

$$\vec{OM}^2 = r^2$$

$$(d\vec{OM})^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$



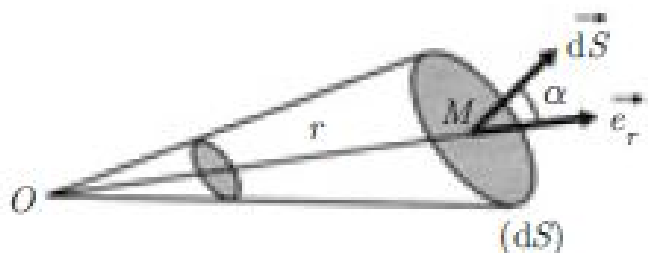
Bien distinguer la coordonnée polaire $r = OM$ et la coordonnée sphérique $r = OM$.

1.2. Angle solide

- Angle solide élémentaire

Par définition l'angle solide $d\Omega$ sous lequel on voit une surface élémentaire dS à partir d'un point donné O

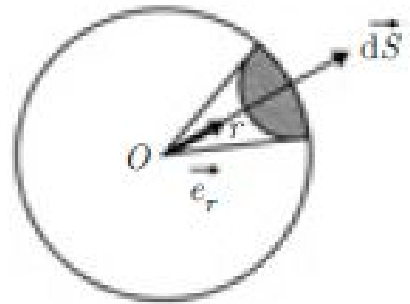
est :



$$d\Omega = \frac{\vec{dS} \cdot \vec{e}_r}{r^2} = \frac{dS \cdot \cos \alpha}{r^2}$$

Dans le cas où l'élément dS est pris sur la sphère de centre O et de rayon r , on a tout simplement :

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} \vec{N} \cdot \vec{e}_r = \frac{dS}{r^2}$$



1.3. Operateurs vectoriels

1.3.1 Gradient

L'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}$ (ou encore $\overrightarrow{\nabla}$, opérateur vectoriel polaire nabla) associe à

une fonction scalaire $f(x, y, z)$ un vecteur de composantes $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$,

comme :
$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

on en déduit : $df = (\overrightarrow{\text{grad}} f) \cdot d\overrightarrow{OM}$ relation que l'on utilise pour définir le gradient dans un système de coordonnées quelconques.

- **Coordonnées cartésiennes :** $f = f(x, y, z)$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

- **Coordonnées cylindriques :** $f = f(r, \theta, z)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} f &= (\overrightarrow{\text{grad}} f)_r \cdot \vec{e}_r + (\overrightarrow{\text{grad}} f)_\theta \cdot \vec{e}_\theta + (\overrightarrow{\text{grad}} f)_z \cdot \vec{e}_z \\ d\overrightarrow{OM} &= dr \cdot \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z \end{aligned}$$

On en déduit :

$$df = (\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\overrightarrow{OM}) = (\text{grad } f)_r dr + (\text{grad } f)_\theta r d\theta + (\text{grad } f)_z dz$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + r \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{r \partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z \end{matrix}$$

- **Coordonnées sphériques** : $f = f(r, \theta, \varphi)$

Un calcul analogue au précédent donne :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{r \partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \end{matrix}$$

1.3.2 Divergence

L'opérateur div (ou encore $\overrightarrow{\nabla}$) associe à un vecteur \vec{V} le produit scalaire de $\overrightarrow{\nabla}$ par ce vecteur

$$\text{div} \vec{V} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{V} \quad (\text{scalaire})$$

- **Coordonnées cartésiennes** : $\text{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

Coordonnées cylindriques :

On montre que $\text{div} \vec{V}$ peut se mettre sous la forme condensée suivante :

$$\text{div} \vec{V} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Coordonnées sphériques :

- Une expression simplifiée de $\text{div} \vec{V}$ est donnée par :

$$\text{div} \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(V_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}$$

1.3.3 Rotationnel

L'opérateur $\overrightarrow{\text{rot}}$ (ou encore $\overrightarrow{\nabla} \wedge$) associe à un vecteur \vec{V} le produit vectoriel de $\overrightarrow{\nabla}$ par ce vecteur : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{V}$.

Coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{matrix}$$

Coordonnées cylindriques :

$$\left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \right)_r = \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}$$

$$\left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \right)_\theta = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}$$

$$\left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \right)_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right]$$

Coordonnées sphériques :

$$\left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}\right)_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta V_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right]$$

$$\left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}\right)_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r V_\varphi)}{\partial r}$$

$$\left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}\right)_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right]$$

Rotationnel et circulation d'un vecteur :

Par définition, la différentielle de la circulation de \vec{V} sur un contour

fermé (C) est relié au rotationnel de \vec{V} par : $d\varphi = (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) \cdot \overrightarrow{dS}$

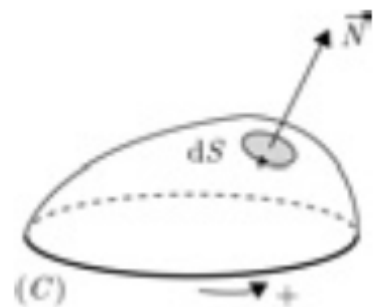
où dS est un élément d'une surface

quelconque (S) qui s'appuie sur (C) .

Cette relation permet de définir la coordonnée

du rotationnel dans une direction quelconque

de vecteur unitaire \vec{n} . On en déduit :



$$\varphi = \oint_{(C)} \vec{V} \cdot \overrightarrow{dM} = \iint_{(S)} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) \cdot \overrightarrow{dS}$$

Cette formule, dite de **Stokes**, facilite parfois le calcul de la

circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé

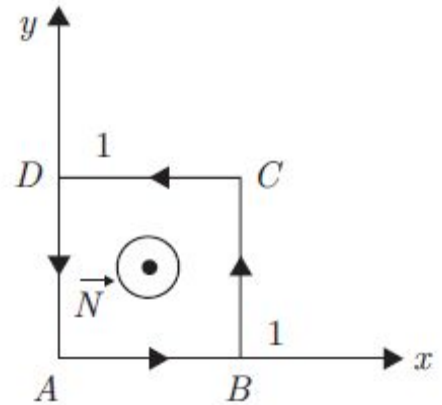
$$\left(\oint_{(C)} \vec{A} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_{(S)} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) \cdot \overrightarrow{dS} , [(S) \text{ s'appuie sur } (C)] \right).$$

Exemple

On considère le champ vectoriel

$$\vec{V} = (ax + by)\vec{e}_x + (cx + fy)\vec{e}_y$$

et le contour fermé $ABCD$ précisé sur la figure.



-Vérifier le théorème de Stokes en calculant la circulation de \vec{V} sur ce contour.

On a d'une part :

$$\varphi = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_0^1 ax \, dx + \int_0^1 (c + fy) \, dy + \int_1^0 (ax + b) \, dx + \int_1^0 fy \, dy = c - b$$

et d'autre part :

$$\iint_{(S)} \overrightarrow{rot \vec{V}} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot \vec{V}} \cdot \vec{N} \, dS$$

et comme :

$$\overrightarrow{rot \vec{V}} = (c - b)\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{N} = \vec{e}_z$$

il vient :

$$\iint_{(S)} \overrightarrow{rot \vec{V}} \cdot d\vec{S} = \int_0^1 \int_0^1 (c - b) \, dx dy = c - b$$

1.3.4 Laplacien

L'opérateur Laplacien (noté Δ) est défini par :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Il peut s'appliquer à une fonction scalaire :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ou à un vecteur :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{V} &= \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2} \\ &= \vec{e}_x \Delta V_x + \vec{e}_y \Delta V_y + \vec{e}_z \Delta V_z \end{aligned}$$

Remarque :

L'intérêt de tous ces opérateurs vectoriels est d'une part, de permettre une écriture concise des équations dites « locales » (exemple : équations de Maxwell), et d'autre part, de faciliter les calculs, grâce aux relations vectorielles qui existent entre eux, et aux transformations intégrales qu'ils permettent d'effectuer.

4 Relations vectorielles

Produit mixte :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A})$$

Double produit vectoriel :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

f et p étant des fonctions scalaires, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(fp) &= f \overrightarrow{\text{grad}} p + p \overrightarrow{\text{grad}} f \\ \text{div}(f \vec{A}) &= (\overrightarrow{\text{grad}} f) \cdot \vec{A} + f \text{div} \vec{A} \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}$$

$$\operatorname{rot}(f \vec{A}) = (\operatorname{grad} f) \wedge \vec{A} + f \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

CHAPITRE 2 :

ÉLECTROSTATIQUE

2.1. Charges électriques

Dans tout phénomène physique intervient un « objet » dont la structure confère certaines propriétés à l'espace qui l'entoure. Dans le cas de la gravitation, l'objet est constitué par une masse. En électrostatique, l'objet est une charge, mesurée en coulomb (C) dans le système international. Il existe deux types de charge électrique ; les charges de même nature se repoussent tandis que celles qui sont de nature différente s'attirent. Les unes sont dites « positives » et sont mesurées par un nombre positif, les autres sont dites « négatives » et sont mesurées par un nombre négatif. Toute charge est multiple de la *charge élémentaire* : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$

Les atomes sont constitués de particules chargées, à savoir :

– *les électrons* : (e^-) responsables de la conduction électrique dans les métaux

$$\text{charge : } q_e = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} C$$

$$\text{masse : } m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} Kg$$

– *les protons* : (H^+)

$$\text{charge : } q_p = e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$$

$$\text{masse : } m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} Kg$$

ainsi que les ions et les porteurs de charge dans les semi-conducteurs qui peuvent être des électrons ou des « trous » (absence d'électrons).

On distingue :

- **les charges ponctuelles** : supposées sans dimension, ce qui est analogue à l'hypothèse du point matériel en mécanique.
- **les distributions continues de charge** : hypothèse d'une charge macroscopique permettant de définir une charge infinitésimale dq , à laquelle on peut appliquer les formules établies dans le cas d'une charge ponctuelle, avant d'intégrer sur la distribution.

On définit ainsi les densités :

– linéique sur un fil : $\lambda = \frac{dq}{dl} \quad [C.m^{-1}]$

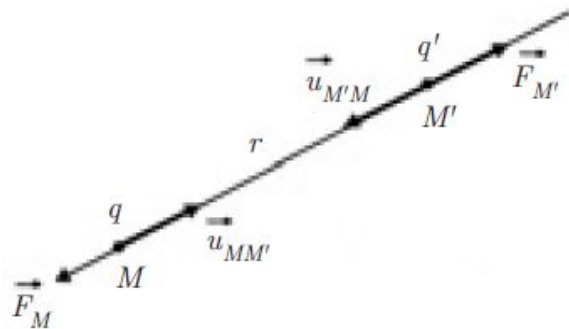
– surfacique (ou superficielle) sur une surface : $\sigma = \frac{dq}{dS} \quad [C.m^{-2}]$

– volumique dans un volume : $\rho = \frac{dq}{dV} \quad [C.m^{-3}]$

auxquelles correspondent respectivement les charges infinitésimales λdl , $—dS$ et $/\delta\zeta$

2.2. Loi de coulomb

Soit deux charges q et q' placées en M et M' et distantes de r . Ces charges peuvent être positives ou négatives, mais dans le cas de la figure, nous supposons qu'elles sont de même signe.



La loi de Coulomb permet de déterminer la force $\vec{F}_{MM'}$ exercée par q sur q' , ou encore la force $\vec{F}_{M'M}$ exercée par q' sur q , ces deux forces étant égales et opposées, conformément au principe de l'action et la réaction.

Cette loi s'écrit :
$$\vec{F}_{M'} = K \frac{qq'}{r^2} \vec{u}_{MM'} \text{ ou } \vec{F}_M = K \frac{qq'}{r^2} \vec{u}_{M'M}$$

Avec :

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 \text{ S.I}$$

$\vec{u}_{MM'}$ est le vecteur unitaire porté par le support de MM' , orienté de M vers M' , (on dit dans le sens qui va de la cause vers l'effet).

Cette loi traduit l'interaction entre les deux objets q et q' .

Remarque :

La force est répulsive si les charges sont de même signe, elle est attractive si elles sont de signes contraires.

2. 3. Champ et potentiel

2.3.1 Cas d'une charge ponctuelle

La seule présence d'une charge ponctuelle q au point M (comme d'ailleurs d'une masse ponctuelle m , dans le cas de la gravitation) permet de définir deux propriétés en un point M' de l'espace environnant :

– une propriété vectorielle, le champ électrostatique :

$$\vec{E}_{M'M} = K \frac{q}{r^2} \vec{u}_{M'M}$$

$|q|$ représentent la valeur absolue de la charge q . L'équation aux dimensions

d'une force étant MLT^{-2} et celle d'une charge IT , celle de E sera $[E] = MLI^{-1}T^{-3}$

- une propriété scalaire, le potentiel électrostatique (défini à une constante près) :

$$V_M = K \frac{q}{r} + cte$$

– et une relation entre les deux propriétés :

$$\vec{E}_M = -\overrightarrow{\text{grad}} V_M \quad \text{ou} \quad dV = -\vec{E}_M \cdot d\vec{M}$$

Le champ électrique est orienté vers les potentiels décroissants

2.3.2 Cas d'un système de charges

Lorsque n charges ponctuelles existent simultanément en des points M_1, M_2, \dots, M_n ,

le principe de superposition permet d'écrire :

– pour le champ résultant en un point M (avec $r_i = MiM \neq 0$) :

$$\vec{E}_M = K \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{M_i M}$$

– et pour le potentiel résultant :

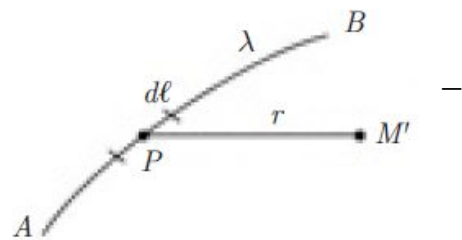
$$V_M = K \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Dans le cas de distributions continues de charges, on aura de même :

– pour un fil chargé uniformément :

$$\vec{E}_M = K \int_{\widehat{AB}} \frac{\lambda d\ell}{r^2} \vec{u}_{PM}$$

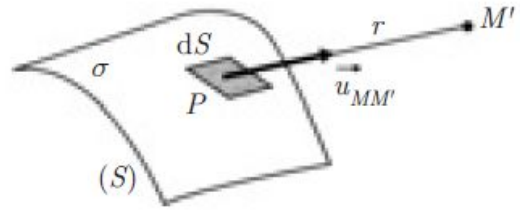
$$V_M = K \int_{\widehat{AB}} \frac{\lambda d\ell}{r}$$



pour une surface chargée uniformément :

$$\vec{E}_M = K \iint_{(S)} \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u}_{MM'}$$

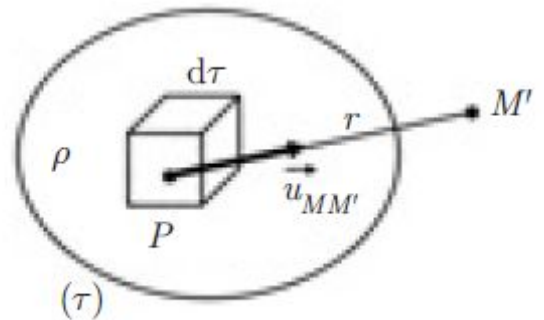
$$V_M = K \iint_{(S)} \frac{\sigma dS}{r}$$



– et pour un volume chargé uniformément :

$$\vec{E}_M = K \iiint_{(\rho)} \frac{\rho dV}{r^2} \vec{u}_{MM'}$$

$$V_M = K \iiint_{(\rho)} \frac{\rho dV}{r}$$



3. Force et Energie Potentielle Electrostatiques

3.1 Force électrostatiques

De façon générale, la présence d'une charge q en un point M où le champ est \vec{E} se traduit par une interaction caractérisée par deux propriétés :

– une propriété vectorielle, la force exercée sur la charge q :

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$$

Rappelons qu'une charge ponctuelle isolée ne peut avoir une énergie potentielle.

En effet, cette charge crée autour d'elle un champ \vec{E} et un potentiel V , mais c'est en interagissant avec le champ d'une autre charge ou d'une distribution de charges qu'elle va acquérir une énergie potentielle E_p engendrant une force d'interaction \vec{F} .

Dans le cas de deux charges q et q' en interaction, l'énergie potentielle s'exprime par :

$$E_p = K \frac{qq'}{r}$$

où q et q' sont des valeurs algébriques et r est la distance séparant les deux charges. Il faut rappeler que l'énergie potentielle définie ci-dessus peut être considérée comme :

- l'énergie de q' dans le champ de q ,
- l'énergie de q dans le champ de q' ,
- une propriété scalaire, l'énergie potentielle définie à une constante près comme le potentiel :

$$E_p = qV_M$$

- et une relation entre les deux propriétés :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

3.2 Energie potentielle d'un système de charges

Cas d'une distribution de charges ponctuelles

Soit un système de charges q_1, q_2, q_3 placées respectivement aux points A_1, A_2, A_3 . On cherche à déterminer l'énergie potentielle d'un tel système. Pour cela, on adoptera la même démarche que précédemment, qui consiste à reconstituer le système en amenant les charges l'une après l'autre, de l'infini à leurs positions définitives.

$$E_p = \frac{1}{2}(q_1 V_1 + q_2 V_2 + q_3 V_3)$$

où V_1 est le potentiel résultant créé par les charges (q_2, q_3) au point A_1 , V_2 le

potentiel créé par les charges (q_3, q_1) au point A_2 , et V_3 le potentiel créé par les charges (q_1, q_2) au point A_3 .

soit, en généralisant au cas de n charges

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i$$

Cas d'une distribution continue de charges

On peut étendre la sommation discontinue précédente à une sommation intégrale. En désignant par dq la charge élémentaire et par V le potentiel auquel est soumis cette charge, on obtient :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{\text{espace chargé}} V dq$$

Distribution linéaire :

$$dq = \lambda dl \quad E_p = \frac{1}{2} \int_L \lambda V dl$$

Distribution superficielle :

$$dq = \sigma dS \quad E_p = \frac{1}{2} \int_S \sigma V dS$$

Distribution volumique :

$$dq = \rho d\tau \quad E_p = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V d\tau$$

4. Exemples d'applications

Exemple 1. Comparaison entre force électrostatique et force de gravitation dans l'atome d'hydrogène

On donne la constante de gravitation $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$ S.I et le premier rayon de l'atome de Bohr $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10}$ m.

Dans l'atome d'hydrogène, un électron (charge $-e$) décrit une orbite circulaire de rayon a_0 autour d'un noyau constitué d'un proton (charge $+e$). Il s'agit de comparer les forces électrostatique (\vec{F}_e) et gravitationnelle (\vec{F}_g) entre ces deux particules.

$$F_e = K \frac{q_1 q_2}{a_0^2} = \frac{910^9 (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(0,53 \cdot 10^{-10})^2} = 8,1 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{a_0^2} = \frac{6,7 \cdot 10^{-11} (9,1 \cdot 10^{-31})(1,67 \cdot 10^{-27})}{(0,53 \cdot 10^{-10})^2}$$

$$= 3,7 \cdot 10^{-47} \text{ N}$$

La force électrostatique est environ $2 \cdot 10^{39}$ fois plus grande que la force de gravitation. Cette dernière est donc tout à fait négligeable.

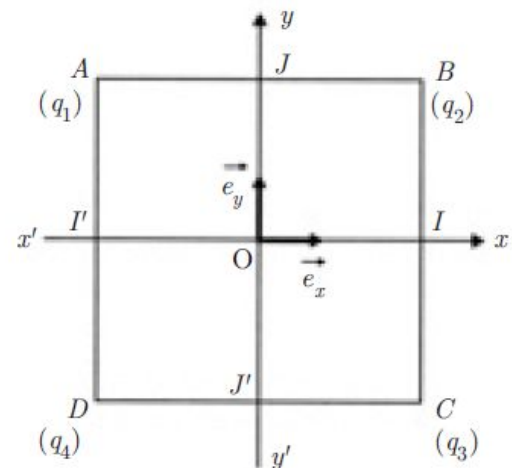
Pour les particules « élémentaires » (électrons, protons, ions,.....) on néglige toujours les forces de gravitation ou de pesanteur devant les forces électrostatiques.

Exemple2:

On place quatre charges ponctuelles aux sommets $ABCD$ d'un carré de côté $a = 1$ m, et de centre O , origine d'un repère orthonormé Oxy de vecteurs unitaires \vec{e}_x et \vec{e}_y . On donne : $q_1 = q = 10^{-8}$ C,

$$q_2 = -2q, q_3 = 2q \text{ et } q_4 = -q$$

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ S.I}$$



- 1) Représenter et calculer la force de coulomb appliqué sur la charge au point A.
- 2) Représenter et calculer le champ électrique \vec{E} au centre O du carré. Préciser la direction, le sens et la norme de \vec{E} .
- 3) Exprimer le potentiel V créé en O par les quatres charges.

Solution :

- 1) Calcul la force de coulomb appliqué sur la charge au point A :

On a $\vec{F}_A = \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{CA} + \vec{F}_{DA}$

$$\vec{F}_{BA} = K \frac{q_B q_A}{(BA)^2} \vec{U}_{BA}$$

- 2) Détermination du champ \vec{E} en O.

Soit $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ et \vec{E}_4 les champs créés en O

Respectivement par les charges q_1, q_2, q_3 et q_4 .

On a : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$

On trouve

$$\vec{E} = \frac{2Kq}{a^2} \sqrt{2} \vec{e}_y$$

Le champ résultant E est donc :

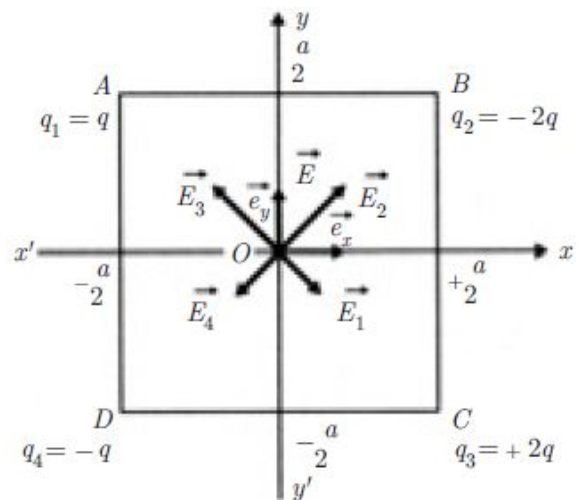
- dirigé suivant l'axe y/oy ;
- dans le sens positif de l'axe y/oy ;

–De norme $\frac{2Kq}{a^2} \sqrt{2}$

A.N : $E = 9.10^9 \times 10^{-8} \times 2\sqrt{2} = 254,6 V.m^{-1}$

- 3) Détermination du potentiel V en O :

Soient V_1, V_2, V_3 et V_4 les potentiels créés par les charges q_1, q_2, q_3 et q_4 en O.



$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{2Kq}{a\sqrt{2}}[1 - 2 + 2 - 1], \text{ soit : } \boxed{V = 0}$$

Exemple 3. Champ créé par un fil circulaire portant une densité de charge uniforme $\lambda = dq/dl$, en un point M de son axe ($OM = z$).

On suppose $\lambda > 0$.

1) Calcul direct du champ \vec{E}

À chaque élément dl du fil, on peut faire correspondre un élément dl' symétrique par rapport à O . Par raison de symétrie, seule la composante de dE sur l'axe Oz intervient : \vec{E} est porté par \vec{e}_z .

Il est plus élégant de remarquer que tout plan contenant Oz est plan de symétrie pour la distribution de charge et contient donc \vec{E} (qui est un vecteur polaire).

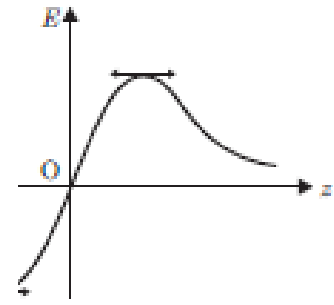
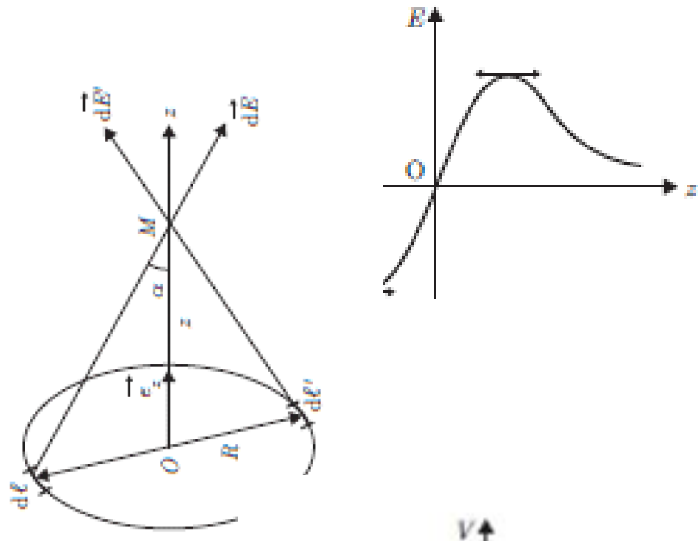
En un point de l'axe, \vec{E} appartient à l'intersection de ces plans : il est donc selon l'axe Oz . On a successivement :

$$\begin{aligned} dE_z &= dE \cos \alpha \\ &= \frac{Kdq}{z^2 + R^2} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

$$dq = \lambda dl$$

$$E_z = \frac{K\lambda z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dl$$

$$\text{et } \vec{E} = \frac{\lambda Rz}{2\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

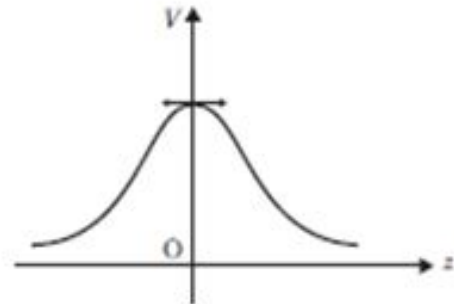


2) Calcul direct du potenti

$$dV = \frac{K dq}{(z^2 + R^2)^{1/2}} = \frac{k}{(z^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$V = \frac{K \lambda}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi R} dl$$

$$V(z) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{1/2}}$$



3) Calcul du champ à partir du potentiel

$$V = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{1/2}} \quad \text{avec} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

On a successivement :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}$$

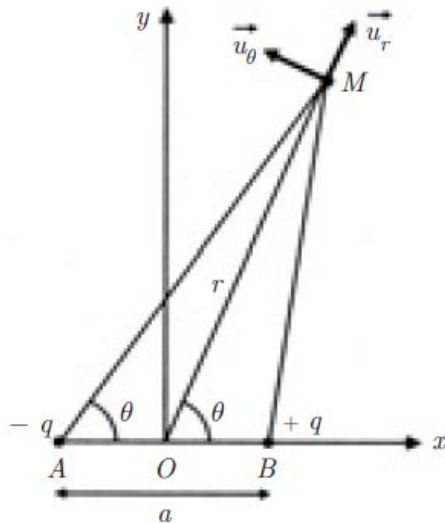
$$\vec{E}_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

5. Dipôle électrostatique

On considère deux charges $-q$, $+q$ placées aux points A et B , distants de a . Ce système, appelé dipôle électrique ou doublet électrique, qui crée un champ et un potentiel dans l'espace environnant. Le modèle théorique du dipôle trouve son application dans la polarisation des molécules conduisant à l'approximation dipolaire de la matière.

Les calculs du champ et du potentiel créés par un dipôle se font toujours en des points très éloignés du dipôle $OM \gg a$.

5.1 Calcul du potentiel à grande distance



$$\text{or : } BM^2 = (BO + OM)^2 = (OM - OB)^2 = OM^2 + OB^2 - 2OB \cdot OM \cos \theta = r^2 + \frac{a^2}{4} - a \cdot r \cdot \cos \theta$$

$$\text{soit : } BM = r \cdot \sqrt{1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2}}$$

$$\text{de même en changeant } \theta \text{ en } \pi - \theta, \text{ on obtient : } AM = r \cdot \sqrt{1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2}}$$

$$\text{D'où : } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$r \gg a$ d'où $a/r \ll 1$, on peut utiliser le développement limité au 1^{er} ordre de la forme $(1+x)^n$ ou $(1-x)^n$:

$$\text{On obtient : } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta\right) - \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta\right) \right]$$

$$\text{Ou encore : } \boxed{V = \frac{q \cdot a \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}} \text{ avec } r = OM$$

Pour $\theta = \pi/2$, $V=0$ pour tous les points du plan médiateur de AB. Ce plan est une surface équipotentielle.

On définit le *moment dipolaire* :

$$\boxed{\vec{p} = q \vec{AB} = q a \vec{u}_{AB}}$$

On peut noter que q est toujours la valeur absolue de la charge et que \vec{p} est orienté de la charge négative vers la charge positive.

$$\boxed{V = K \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2} = \frac{K p \cos \theta}{r^2}}$$

5.2 Calcul du champ électrique à grande distance

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\overrightarrow{\text{grad}} V \\ E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2K p \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{Kp \sin \theta}{r^3} \\ E_z &= 0\end{aligned}$$

pour M éloigné, \vec{E} et V créés par le dipôle seront négligeable par rapport à \vec{E} et V créés par des charges situées à proximité du dipôle.

Expressions cartésiennes

Le potentiel et le champ présentent évidemment une symétrie de révolution autour de l'axe support \overrightarrow{AB} , pris ici comme axe Ox. Comme

$$\cos \theta = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

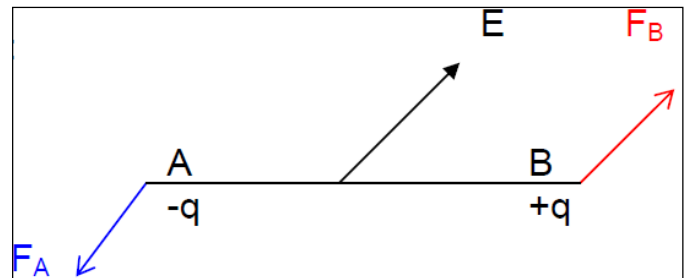
On trouve

$$\begin{aligned}V &= K \frac{px}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = Kp \left[\frac{3x^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right] \\ &= Kp \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = Kp \frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \\ &= Kp \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{r^3}\end{aligned}$$

Lorsqu'on s'éloigne du dipôle, le potentiel décroît en $\frac{1}{r^2}$ (comparé à $\frac{1}{r}$ par une charge ponctuelle) et le champ en $\frac{1}{r^3}$ (comparé à $\frac{1}{r^2}$).

5.3 Mouvement du dipôle dans un champ E uniforme

Le dipôle est soumis à un couple de forces : même intensité, directions différentes et sens opposés. Ce couple est caractérisé par son moment $\vec{\Gamma}$.



$$\begin{aligned}\vec{\Gamma} &= \vec{OA} \wedge \vec{F}_A + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B = \vec{OA} \wedge -q\vec{E} + \vec{OB} \wedge q\vec{E} \\ &= (\vec{OB} - \vec{OA}) \wedge q\vec{E} = \vec{AB} \wedge q\vec{E} = q \cdot \vec{AB} \wedge \vec{E}\end{aligned}$$

donc $\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}}$

Application : Matérialisation des lignes de champ : les particules qui sont des dipôles (par exemple les grains de semoule), plongé dans E, s'orientent en dessinant les lignes de champ.

Chapitre 3

Théorème de Gauss :

3.1. Flux du Champ Electrique Créé par une Charge Ponctuelle

Soit une charge q placée au point O . Le champ créé par cette charge en un point M , à une distance $OM = r$ est donnée par :

$$\vec{E} = \frac{K \cdot q}{r^2} \vec{e}_r$$

Rappelons les propriétés suivantes de ce

champ en $\frac{\vec{e}_r}{r^2}$:

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \quad \text{car } \vec{E} \text{ est un gradient.}$$

Circulation de \vec{E} le long d'un contour (C) fermé : $\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Pour le calcul du flux de \vec{E} à travers une surface fermée (S) , deux cas peuvent se présenter :

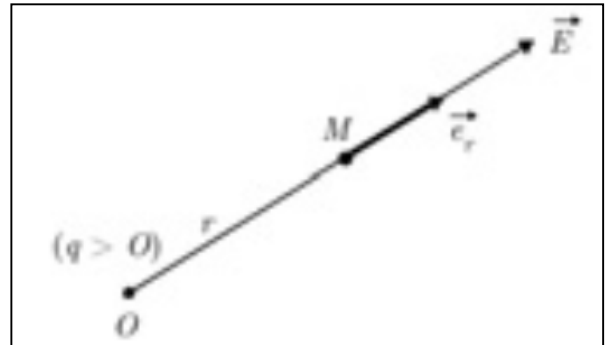
a) q n'est pas englobée par (S)

Soit dS et dS' deux éléments de surface découpés par l'angle solide $d\Omega$ issu

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = K \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{N} dS = -K q d\Omega$$

de O . On a

$$d\Phi' = \vec{E}' \cdot d\vec{S}' = K \frac{q}{r'^2} \vec{e}_r \cdot \vec{N}' dS' = -K q d\Omega$$



Au total

$$d\Phi_T = d\Phi + d\Phi' = 0 \Rightarrow \Phi = 0$$

D'ailleurs, d'après le théorème de la divergence, puisque $\text{div } \vec{E} = 0$, on peut écrire également :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \text{div } \vec{E} dV = 0$$

en remarquant que \vec{E} est toujours défini dans le volume (V).

b) q est englobée par (S)

Dans ce cas,

$$\text{div } \vec{E} = Kq \text{div} \left(\frac{\vec{e}_r}{r^2} \right)$$

n'est pas défini en O.

Le théorème de la divergence n'est donc pas applicable.

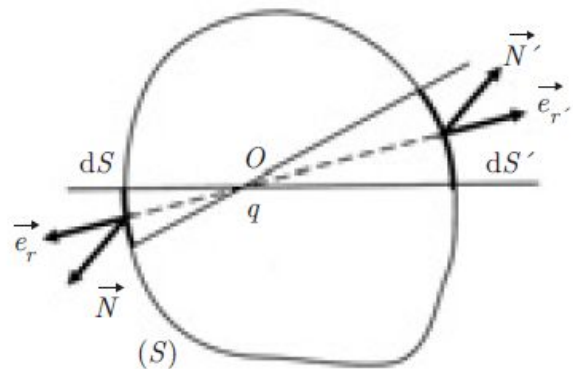
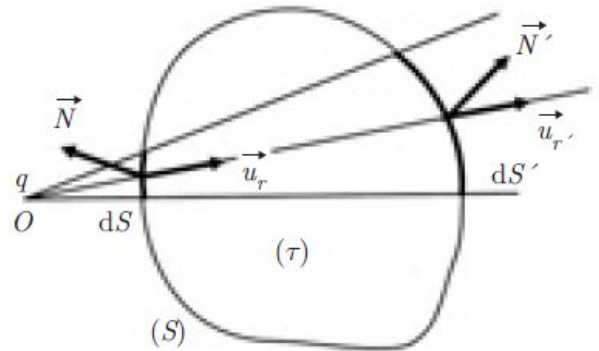
$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{dS} = K \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{N} dS = K q d\Omega$$

On a :

$$d\Phi' = \vec{E}' \cdot \vec{dS}' = K \frac{q}{r'^2} \vec{e}_r \cdot \vec{N}' dS' = K q d\Omega$$

$$\text{Au total } \Phi = \iint_S K q d\Omega = 4\pi K q$$

$$\text{Soit : } \Phi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{puisque } K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

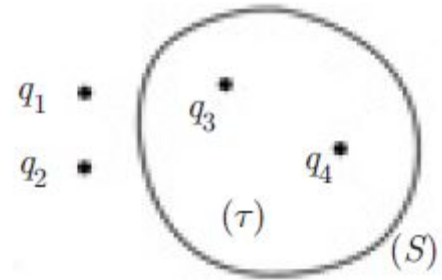


3.2. Théorème de Gauss

On considère plusieurs charges q_i , les unes à l'intérieur du volume V , les autres à l'extérieur.

Si q_i est à l'intérieur : $\Phi_i = \frac{q_i}{\epsilon_0}$

Si q_i est à l'extérieur : $\Phi_i = 0$



Par conséquent, le flux du champ résultant à travers (S) n'est dû qu'aux seules charges intérieures à l'intérieur de S :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} \quad (\text{charges intérieures uniquement})$$

Intérêt du théorème de Gauss

Par rapport au calcul direct du champ \vec{E} , le théorème peut présenter des avantages si des considérations de symétrie s'avèrent favorables : par exemple : $\vec{E} \perp \vec{N}$ ($\vec{E} \cdot \vec{N} = 0$) en tout point de la surface ou encore norme de \vec{E} constante.

3.3. Loi locale et loi intégrale

Soit une surface (S) fermée, contenant une charge Q répartie uniformément dans le volume V qu'elle entoure, la densité volumique étant ρ .

On a alors :
$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(V)} \rho \cdot dV = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Cette écriture constitue la forme intégrale du théorème de Gauss.

Le théorème de la divergence permet d'écrire par ailleurs :

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iiint_{(V)} \text{div} \vec{E} \cdot dV$$

De ces relations, on déduit la forme locale suivante pour le théorème de Gauss :

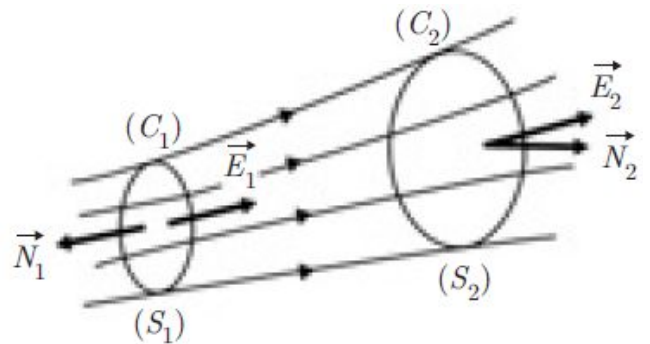
$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Cette deuxième loi locale de l'électrostatique (comme la première

$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V$ ou $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = \vec{0}$) présente un caractère général, elle ne fait intervenir que le point considéré indépendamment de toute symétrie globale.

3.4. Conservation du flux le long d'un tube de champ

Un tube de champ est constitué par toutes les lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé : contour (C_1) sur la figure, qui devient (C_2) un peu plus loin, dans le sens du champ.



Si le tube compris entre (C_1) et (C_2) ne contient aucune charge, on a : $\rho = 0$.

Comme aucun flux ne sort de la paroi latérale du tube, on a :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{tube}} &= \Phi_1(\text{sortant}) + \Phi_2(\text{sortant}) \\ &= \iiint_{(V)} \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot dV = 0 \end{aligned}$$

D'après l'orientation des vecteurs \vec{N}_1 et \vec{N}_2 , on voit que $\Phi_1(\text{sortant})$ est négatif, alors que $\Phi_2(\text{sortant})$ est positif.

Si on choisit d'orienter les deux normales dans le sens de \vec{E} , on peut définir des flux Ψ_1 et Ψ_2 de même signe, tels que $\Psi_1 = -\Phi_1$ et $\Psi_2 = \Phi_2$. On peut alors écrire : $\Psi_1 = \Psi_2$

qui exprime à l'échelle globale que le flux est conservatif à travers les différentes sections du tube.

À l'échelle locale, en l'absence de charge, la conservation du flux de \vec{E} s'exprime simplement par : $div \vec{E} = 0$

3.5. ÉQUATIONS DE POISSON ET DE LAPLACE

En présence d'une densité volumique de charge, on peut écrire les deux lois locales :

$$\begin{cases} \vec{E} = -\overrightarrow{grad} V \\ div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow div(-\overrightarrow{grad} V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Or $div(\overrightarrow{grad}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} = \Delta$. On en déduit :

$$\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0} \quad (\text{Équation de Poisson}).$$

et dans le vide : $\boxed{\Delta V = 0}$ (équation de Laplace)

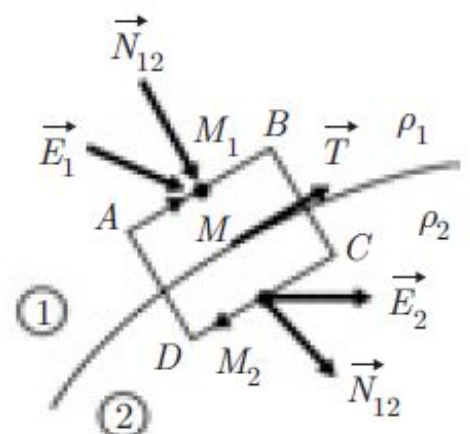
3.6. Conditions de passage à l'interface entre deux distributions de charges différentes

Soit deux points M_1 et M_2 infiniment voisins du point M pris sur l'interface séparant les deux distributions. En ces points, on a respectivement :

$$\vec{E}_1 = E_{1T} \vec{T} + E_{1N} \vec{N}_{12}$$

$$\vec{E}_2 = E_{2T} \vec{T} + E_{2N} \vec{N}_{12}$$

où \vec{T} est le vecteur unitaire porté par la tangente en M à l'interface, et \vec{N}_{12} est le vecteur unitaire normal à l'interface, orienté du milieu (1) vers le milieu (2).



On veut exprimer que la circulation de \vec{E} le long du contour fermé élémentaire (C) représenté sur la figure est nulle. En supposant que la contribution des côtés AD et BC est négligeable devant celle des côtés AB et DC, on peut écrire :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 = E_{1T} AB - E_{2T} CD \quad \text{avec } AB = CD$$

on en déduit : $\boxed{\vec{E}_{1T} = \vec{E}_{2T}}$

La composante tangentielle de \vec{E} se conserve, malgré la discontinuité de ρ sur l'interface.

Supposons maintenant que l'interface porte une charge surfacique σ .

On considère le parallélépipède élémentaire représenté sur la figure, et on cherche à déterminer le flux de \vec{E} sortant de ce parallélépipède.

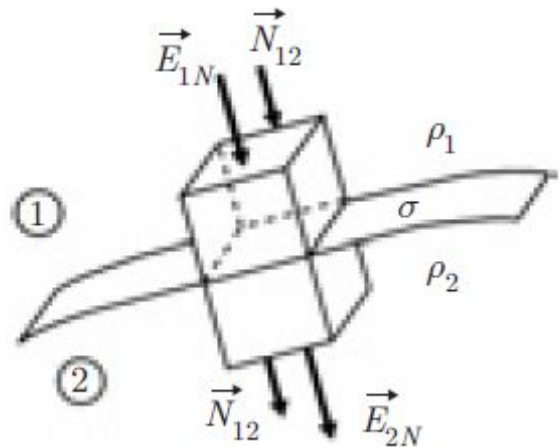
La contribution des densités volumiques ρ_1 et ρ_2 à ce flux étant un infiniment petit du 3^e ordre comparée à la contribution de la densité surfacique σ qui est du 2^e ordre, on peut ignorer les charges volumiques

et écrire : $\Phi = \int_{(S_{totale})} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_{2N} S - E_{1N} S$

Le théorème de Gauss s'exprime par : $\Phi = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$

on en déduit : $\vec{E}_{2N} - \vec{E}_{1N} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}_{12}$

La composante normale de \vec{E} subit une discontinuité proportionnelle à la densité surfacique σ . Elle ne se conserve que si l'interface ne porte pas de charges.



Le calcul du champ \vec{E} au voisinage d'un plan infini chargé, a montré que ce champ est donné par $\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{N}_{12}$ de part et d'autre du plan.

On retrouve bien la discontinuité égale à $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ en traversant le plan chargé.

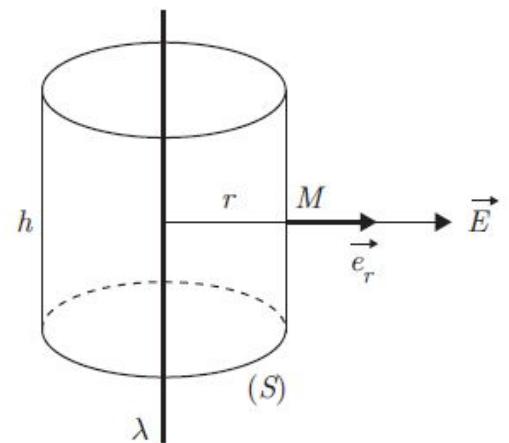
3.7. Exemples d'application

Exemple 1. Champ créé par un fil rectiligne infini chargé d'une densité linéique

La distribution de charge est invariante par rotation autour du fil et par translation parallèle au fil : le potentiel et le champ ne peuvent donc dépendre des coordonnées cylindriques ϕ et z :

$$V = V(r) \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$$

Le champ électrique est donc radial. Pour calculer le champ en M , on peut alors choisir comme surface fermée d'intégration (S) un cylindre de révolution autour du fil, de rayon r et de hauteur h (surface de Gauss).



Le flux sortant par les bases de (S) étant nul, on a :

$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S \text{ lat.})} E dS = E \iint_{(S \text{ lat.})} dS = 2\pi r h E$$

$$\Sigma \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

Le théorème de Gauss s'écrit donc :

$$2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \implies \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

Le potentiel en M se déduit de \vec{E} par

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \implies dV = -E dr$$

D'où :

$$V = - \int E dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + \text{cte}$$

Les lignes de champ sont des droites radiales, et les surfaces équipotentiels des cylindres coaxiaux, de révolution autour du fil.

Notez qu'il n'est pas possible ici de choisir la constante de sorte que le potentiel soit nul à l'infini : ceci est dû à la présence de charges à l'infini.

Exemple 2. Champ créé par une sphère chargée d'une densité volumique ρ uniforme

Le calcul était limité à un point M à l'extérieur de la sphère. Il s'agit ici de l'étendre à tout point de l'espace.

Par suite de la symétrie sphérique, on peut considérer que $V = V(r)$ et par conséquent que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\left(\frac{dV}{dr}\right)\vec{e}_r$ est radial d'une part, et ne dépend que de r d'autre part.

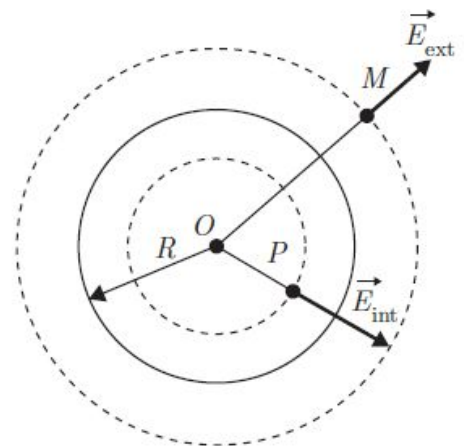
1) Champ à l'extérieur : $OM \geq R$

Soit (S_1) la surface de Gauss passant par le point M extérieur (sphère de rayon r).

On a :

$$\oiint E_{\text{ext}} dS = E_{\text{ext}} \oiint_{(S_1)} dS = 4\pi r^2 E_{\text{ext}}$$

$$\Sigma \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{4}{3}\pi \frac{R^3}{\epsilon_0} \rho$$



Le théorème de Gauss donne donc :

$$4\pi r^2 E_{\text{ext}} = \frac{4}{3}\pi \frac{R^3}{\epsilon_0} \rho \implies \vec{E}_{\text{ext}} = \rho \frac{R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{KQ}{r^2} \vec{e}_r$$

Expression déjà trouvée par le calcul direct.

2) Champ à l'intérieur : $OP \leq R$

Soit (S_2) la surface de Gauss passant par le point P intérieur (sphère de rayon r). On a encore :

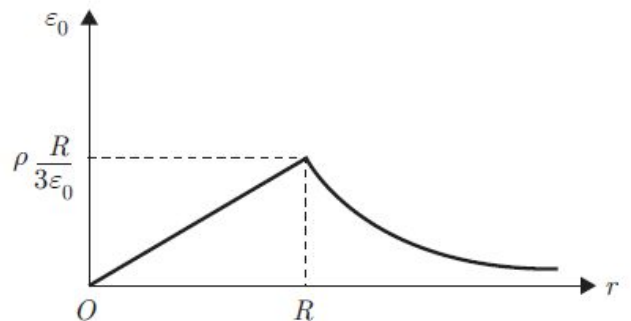
$$\oiint_{(S_2)} \vec{E}_{\text{int}} \cdot \vec{dS} = 4\pi r^2 E_{\text{int}}$$

$$\Sigma \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{4}{3} \pi \frac{r^3}{\epsilon_0} \rho$$

Le théorème de Gauss donne cette fois :

$$4\pi r^2 E_{\text{int}} = \frac{4}{3} \pi \frac{r^3}{\epsilon_0} \rho$$

$$\vec{E}_{\text{int}} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r$$



D'où la variation de E en fonction de r représentée sur la figure.

3) Calcul du potentiel

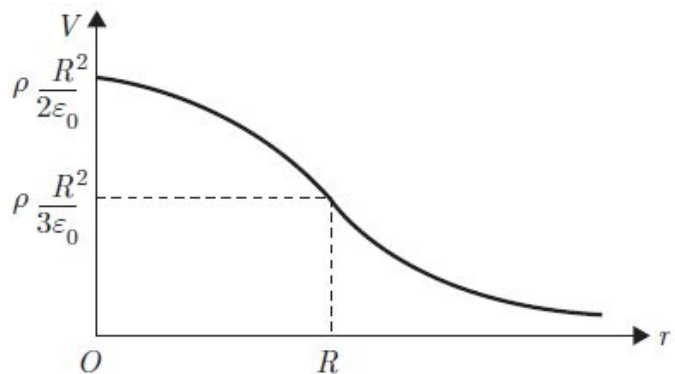
Le champ \vec{E} étant radial, $dV = -\vec{E} \cdot \vec{dr} = -E dr$. À l'extérieur, on a :

$$V_{\text{ext}} = - \int E_{\text{ext}} dr = - \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + C_1$$

Lorsque $r \rightarrow \infty$ $V \rightarrow 0 \implies C_1 = 0$.

À l'intérieur :

$$\begin{aligned} V_{\text{int}} &= - \int E_{\text{int}} dr \\ &= - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int r dr \\ &= - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + C_2 \end{aligned}$$



La continuité de V à la surface de la sphère donne :

$$\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 R} = -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + C_2 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

Finalement :

$$V_{\text{int}} = \rho \frac{R^2}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{r^2}{3R^2} \right]$$

Chapitre 4 :

Conducteurs en équilibre

4.1. Loi de conservation de la charge

Les conducteurs sont des milieux dans lesquels existent des charges libres (positives ou négatives) pouvant être mises en mouvement sous l'action d'un champ électrique.

Parmi les conducteurs, on peut citer les métaux, les semiconducteurs, les électrolytes (Un **électrolyte** est une substance conductrice, car elle contient des ions mobiles) ou encore les gaz ionisés.

À l'intérieur d'un système isolé constitué par plusieurs conducteurs, des déplacements de charges peuvent s'opérer :

- par frottement de corps non chargés préalablement (précédemment),
- par contact de deux corps, si l'un des deux corps ou les deux sont chargés initialement,
- par l'influence de corps chargés sur un corps isolé placé en leur voisinage.

Énoncé de la loi

Dans un *système isolé*, la charge électrique se conserve :

$$\sum q = 0$$

Par exemple, un atome non ionisé se comporte comme une particule électriquement neutre.

4.2. Corps conducteurs et corps isolants

Un corps quelconque, isolé, contient un certain nombre de porteurs de charges : ce sont les protons liés aux noyaux des atomes et les électrons qui gravitent autour des noyaux.

Lorsque certains électrons sont « libres », c'est-à-dire très faiblement liés à leurs atomes d'origine, ils constituent un « gaz d'électrons » susceptible de se

déplacer sous l'action d'un champ électrique \vec{E} et d'acquérir une vitesse moyenne :

$$\langle \vec{v} \rangle = \mu \vec{E}$$

Où μ est la *mobilité* des porteurs libres. Ainsi, dans les métaux, on admet qu'en moyenne un électron se trouve libéré pour chaque atome, le nombre d'atomes par cm^3 étant de l'ordre de 10^{23} . Les isolants ou diélectriques peuvent être définis grossièrement comme des corps ne possédant pratiquement pas de charges libres. Il en résulte une conductivité très faible, ce qui correspond à une résistance très élevée.

4.3 Equilibre électrostatique :

Théorème de coulomb

On définit la condition d'équilibre d'un conducteur comme impliquant l'immobilité des charges contenues à l'intérieur de ce conducteur.

Cela a pour conséquence qu'en tout point intérieur au corps, le champ \vec{E}_{int} est nul.

L'équation locale : $\text{div } \vec{E}_{\text{int}} = \frac{\rho_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

Entraîne que l'équilibre s'exprime finalement par :

$$\boxed{\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0} \quad \rho_{\text{int}} = 0}$$

Il ne peut y avoir de charges libres à l'intérieur d'un conducteur en équilibre et le champ électrique à l'intérieur y est toujours nul.

Deux cas peuvent se présenter suivant que le corps est neutre ou chargé.

Corps conducteur neutre

On a : $\rho_{\text{int}} = 0$ (en volume) $\sigma = 0$ (en surface)

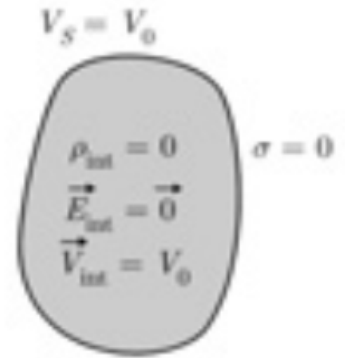
$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad V_{\text{int}} = \text{cte} = V_0$$

- Le volume occupé par la matière conductrice est un volume équipotentiel, et la surface qui le limite est au même potentiel.

$$\overrightarrow{\text{grad}} V_{\text{int}} = \vec{0} \Rightarrow \Delta V_{\text{int}} = 0$$

L'équation de Laplace, valable dans l'espace vide où $\rho = 0$, est donc applicable aux conducteurs en équilibre.

- À l'extérieur du corps, le théorème de Gauss entraîne que $\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0}$.



Corps conducteur chargé

La condition d'équilibre des porteurs de charge entraîne toujours :

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0} \text{ d'où } \rho_i = \epsilon_0 \text{div} \vec{E} = \vec{0} \text{ d'une part et } V_{\text{int}} = \text{cte} = V_0 \text{ d'autre part.}$$

La charge ne peut se répartir que sur la surface, celle-ci est une surface équipotentielle.

Les conditions de passage du champ $\vec{E} = \vec{0}$ à travers la surface donnent :

$$\text{a) } \vec{E}_{T \text{ ext}} = \vec{E}_{T \text{ int}} = \vec{0}$$

Par conséquent, au voisinage de la surface, \vec{E} ne peut être que normal à la surface.

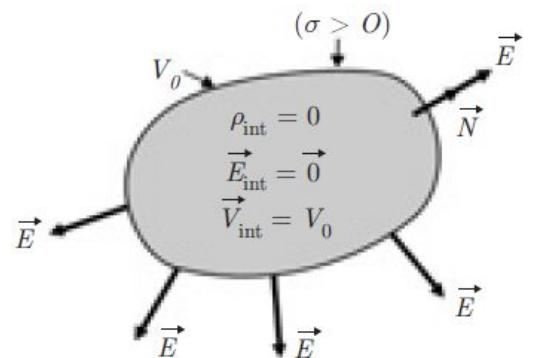
$$\text{b) } (\vec{E}_{\text{ext}} - \vec{E}_{\text{int}}) \cdot \vec{N} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

où \vec{N} est le vecteur unitaire de la normale sortante.

Comme $\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$, on a :

$$\boxed{\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}} \quad (*)$$

Si $\sigma > 0$, le champ est dirigé vers l'extérieur,
si $\sigma < 0$, il est dirigé vers l'intérieur.



Cette relation, qui traduit que les lignes de champ sont normales à la surface du conducteur, constitue le **théorème de Coulomb**.

- **Conséquences**

- Dans le cas d'un conducteur sphérique chargé, le champ sur la surface a pour expression :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

comme si la charge Q était placée au centre de la sphère.

- Comme $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$, on en déduit que, pour une charge Q donnée, la densité surfacique σ est d'autant plus élevée que le rayon de courbure est petit (pouvoir des pointes : sur une pointe, σ et par conséquent le champ \vec{E} peuvent atteindre des valeurs très élevées).

4.4. Pression électrostatique

Soit dS un élément de surface sur un conducteur chargé d'une densité surfacique σ .

Le théorème de Gauss appliqué au cylindre élémentaire indiqué sur la figure donne :

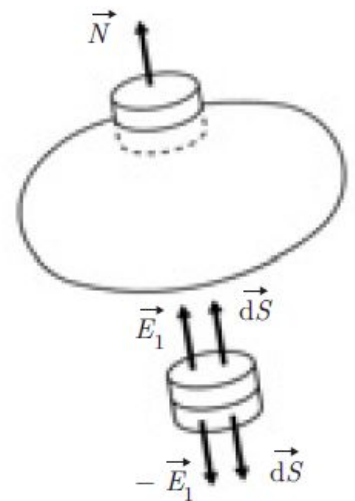
$$E_1 dS + E_1 dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}$$

Le champ extérieur créé par l'élément dS seul est donc :

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{N}$$

Or le champ extérieur au voisinage de dS pris sur le conducteur chargé est

selon (*)
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}$$



On en déduit que le champ créé par le reste du conducteur (conducteur privé de

$$dS) \text{ est : } \vec{E}_2 = \vec{E} - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{N}$$

L'élément σdS « ne voyant pas » son propre champ, ne subit que l'action du champ \vec{E}_2 . Il en résulte une force :

$$d\vec{F} = \sigma dS \vec{E}_2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \vec{N}$$

On peut ainsi définir une pression électrostatique s'exerçant en tout point de la surface du conducteur chargé :

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

Ou encore $p = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ avec $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

où E est la norme du champ à la surface du conducteur.

$d\vec{F}$ est toujours normale à la surface du conducteur, et dirigée vers l'extérieur, quel que soit le signe de la charge.

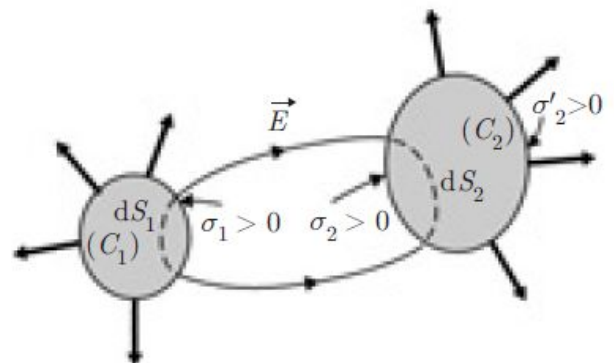
4.5. Influence de deux conducteurs chargés.

Théorème de Faraday

4.5.1 Influence partielle

Soit deux conducteurs (C_1) et (C_2) . On suppose que, initialement (C_1) est chargé avec une densité $\sigma_1 > 0$, et C_2 est neutre.

Dès que l'on approche (C_1) de (C_2) , il apparaît sur la surface de (C_2) : une densité de charge $\sigma'_2 < 0$ sur la partie faisant face à (C_1) et une densité $\sigma'_2 > 0$ sur la partie opposée. Les densités sont de signes contraires pour



assurer la neutralité de (C_2) . Les lignes de champ ont l'allure indiquée sur la figure : elles partent de (C_1) perpendiculaires à la surface et aboutissent à (C_2) également perpendiculaires à la surface.

On considère le tube de champ de section dS_1 sur (C_1) : il va délimiter sur (C_2) une section dS_2 . Le flux sortant de ce tube est nul, car aucun flux ne sort de la paroi latérale (\vec{E} tangent à la paroi) ni des calottes dS_1 , dS_2 (\vec{E} nul à l'intérieur des conducteurs).

Le théorème de Gauss appliqué à ce tube donne :

$$\oiint_{(tube)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = 0 = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$$

soit :
$$\sum q_i = \sigma_2 dS_1 + \sigma_1 dS_2 = 0$$

Les charges $\sigma_1 dS_1$ et $\sigma_2 dS_2$ qui se font face sur deux éléments de surface correspondants sont égales et opposées (théorème de Faraday).

L'influence est dite partielle car seule une partie des lignes de champ issues de (C_1) aboutit à (C_2) .

4.5.2 Influence totale

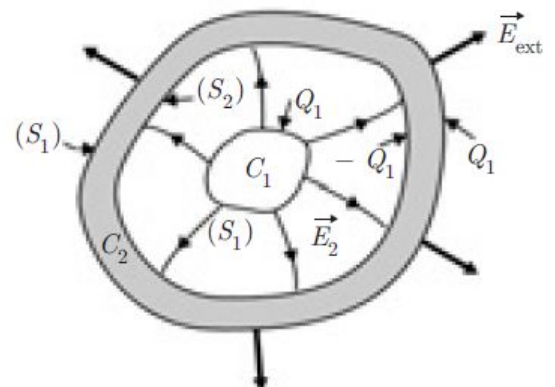
Si l'un des deux corps (C_2 par exemple) entoure totalement l'autre, il y a correspondance totale entre les charges de la surface (S_1) de (C_1) et la surface interne (S_2) de (C_2) .

On peut alors écrire :

$$Q_1 = \int_{(S_1)} \sigma_1 dS_1 = - \int_{(S_2)} \sigma_2 dS_2$$

Les charges globales portées par les deux surfaces en regard sont égales et opposées.

On peut donc résumer la situation de la manière suivante :



- dans la partie massive de (C_1) : $\vec{E}_1 = \vec{0}$
- sur la surface de (C_1) : charge $Q_1 > 0$ créant \vec{E}_2 ,
- sur la surface interne de (C_2) : charge $-Q_1$,
- dans la partie massive de (C_2) : $\vec{E} = \vec{0}$,
- sur la surface externe de (C_2) : apparition de la charge $+Q_1$ pour assurer la neutralité de (C_2) (si l'on suppose (C_2) neutre au départ),
- à l'extérieur des deux conducteurs : le champ \vec{E}_{ext} est celui créé par la seule charge Q_1 portée par la surface externe de (C_2) .

4.6. Capacité d'un conducteur unique

Soit un conducteur porté au potentiel V . Il apparaît alors sur sa surface, une charge q définie par :

$$q = \iint_{(S)} \sigma dS$$

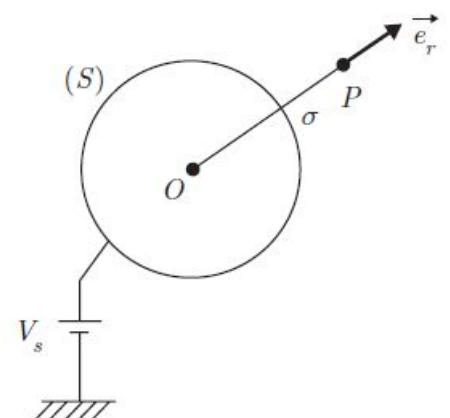
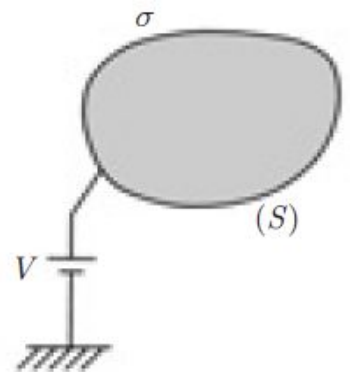
Si le potentiel devient V_1 , puis V_2 , puis V_3 , la charge devient q_1 , q_2 , q_3 . Les relations charge-potentiel étant linéaires (par exemple,

l'équation locale $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ est linéaire car si on multiplie ρ

par un facteur A , le potentiel sera lui aussi multiplié par A), on peut écrire :

$$\frac{q}{V} = \frac{q_1}{V_1} = \frac{q_2}{V_2} = \frac{q_3}{V_3} = C$$

Le coefficient de proportionnalité C , indépendant de q et de V , est appelé la **capacité du corps conducteur**. Il se mesure en farad (F), si q est en coulomb et V en volt.



Exemple .

Capacité d'une sphère conductrice de rayon R Supposons que la sphère est portée au potentiel V_S :

au point P , on a :

$$\vec{E} = K \frac{Q}{(OP)^2} \vec{e}_r, \quad V = \frac{K Q}{OP}$$

et sur la surface :

$$V_S = \frac{K Q}{R}$$

On en déduit, avec $K = 1/4\pi\epsilon_0$: $C = \frac{Q}{V_S} = \frac{R}{K}$

Soit : $C = 4\pi\epsilon_0 R$

4.7. Système de n conducteurs en équilibre

Pour simplifier, on se limite à un système de trois conducteurs. Il s'agit de trouver les relations entre les charges et les potentiels des différents conducteurs. Pour cela, on définit trois états d'équilibre auxquels on applique ensuite le principe de superposition.

-1^{er} état : conducteur n° 1 au potentiel $V_1 > 0$ par exemple, les autres au potentiel 0.

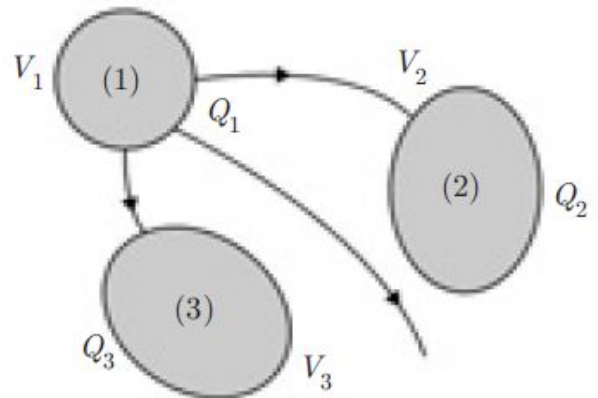
-2^e état : conducteur n° 2 au potentiel V_2 , les autres au potentiel 0.

-3^e état : conducteur n° 3 au potentiel V_3 , les autres au potentiel 0.

1^{er} état : Q_{11}, Q_{21}, Q_{31} étant les charges portées respectivement par les conducteurs 1, 2, 3,

on a :

$$Q_{11} = C_{11} V_1 \quad C_{11} > 0$$



$$Q_{12} = C_{12}V_1 \quad C_{12} < 0 \text{ car charge } Q_{12} < 0$$

$$Q_{13} = C_{13}V_1 \quad C_{13} < 0 \text{ car charge } Q_{13} < 0$$

avec $|C_{12} + C_{13}| \leq C_{11}$ (influence partielle)

$$2^{\text{e}} \text{ état} : Q_{21} = C_{21}V_2$$

$$Q_{22} = C_{22}V_2$$

$$Q_{23} = C_{23}V_2$$

$$3^{\text{e}} \text{ état} : Q_{31} = C_{31}V_3$$

$$Q_{32} = C_{32}V_3$$

$$Q_{33} = C_{33}V_3$$

Superposition des potentiels :

$$V_1 + 0 + 0 = V_1$$

$$0 + V_2 + 0 = V_2$$

$$0 + 0 + V_3 = V_3$$

Superposition des charges :

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + C_{23}V_3$$

$$Q_3 = C_{31}V_1 + C_{32}V_2 + C_{33}V_3$$

La relation entre charges et potentiels est une relation matricielle. La matrice C ainsi définie, soit :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Constitue la matrice des coefficients d'influence du système des trois conducteurs. On peut généraliser la relation entre les charges et les potentiels à un système de n conducteurs. Sous forme matricielle, cette relation s'écrit :

$$[Q_i] = [C_{ij}][V_j]$$

où les indices i et j varient entre 1 et n . Cette écriture signifie que, pour chaque valeur de i , il faut sommer cette expression sur j .

Propriétés de la matrice C :

- elle est symétrique : $C_{ij} = C_{ji}$ (identité de Gauss),
- les termes diagonaux sont positifs : $C_{ii} > 0$, ils constituent les coefficients de capacité,
- les termes non diagonaux sont négatifs : $C_{ij} < 0$, ce sont les coefficients d'influence.

*** Cas particulier d'un système de deux conducteurs en influence totale :**

On a : $Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$

$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2$ avec $C_{21} = C_{12}$

Si le corps (2) entoure le corps (1), l'influence est totale, on

a alors :

$Q_2 = -Q_1 \Rightarrow C_{12}V_1 + C_{22}V_2 = -C_{11}V_1 - C_{12}V_2$

quels que soient V_1 et V_2 .

On en déduit :

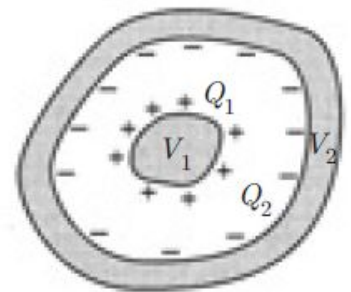
$C_{11} = C_{22} = -C_{12}$

En posant $C_{11} = C$, on peut écrire :

$Q_1 = C(V_1 - V_2)$

$Q_2 = C(V_2 - V_1)$

Le système constitue un *condensateur* et C représente sa capacité.

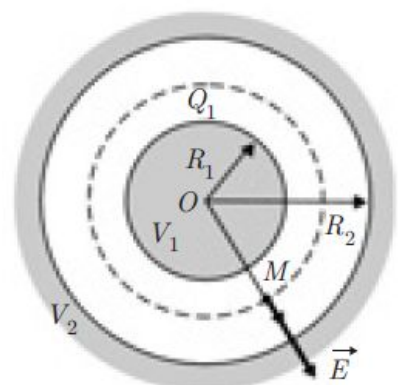


4.8. Capacité d'un condensateur

À partir de la relation de Q_1 et Q_2 , soit :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{-Q}{V_2 - V_1}$$

on voit que la connaissance de la charge Q_1 (ou Q_2) et de la différence de potentiel (d.d.p.) $(V_1 - V_2)$ permet de déterminer la capacité C du condensateur. Lorsque des considérations de symétrie permettent d'appliquer le



théorème de Gauss, le calcul de la capacité C peut se faire très aisément.

***Condensateur sphérique**

Les deux armatures du condensateur sont deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 .

Pour un point M , situé entre les deux armatures et tel que $OM = r$, on peut écrire:

$$\vec{E} = K \frac{Q_1}{r^2} \vec{e}_r$$

$$dV = -E dr \Rightarrow V = K \frac{Q_1}{r} + Cte$$

La d.d.p. entre les deux armatures est donc :

$$V_1 - V_2 = K Q_1 \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

et comme $C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2}$ il vient :

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

*** Condensateur cylindrique**

Les armatures sont constituées par deux cylindres coaxiaux.

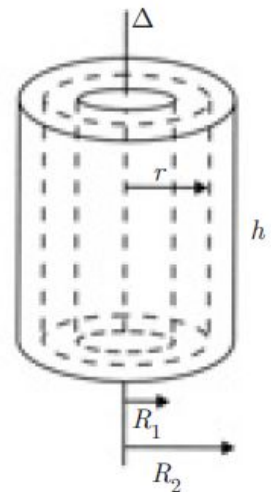
Entre ces deux armatures, le théorème de Gauss permet d'écrire:

$$E 2\pi r h = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 r h} \vec{e}_r$$

On en déduit :

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

D'où la capacité :

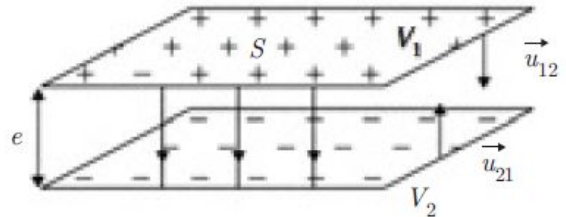


$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

*Condensateur plan

Les armatures sont constituées par deux plans parallèles de surface S , distants de e .

Supposons que la première est chargée positivement d'une densité $+\sigma$ et la deuxième négativement d'une densité $-\sigma$.



Entre les deux armatures, on a :

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_{12} \text{ pour la 1re armature,}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_{21} \text{ pour la deuxième.}$$

Le champ total est donc :
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_{12}$$

On en déduit :
$$V_1 - V_2 = E \cdot e = \frac{\sigma \cdot e}{\epsilon_0} = \frac{Q \cdot e}{S \epsilon_0}$$

D'où :
$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

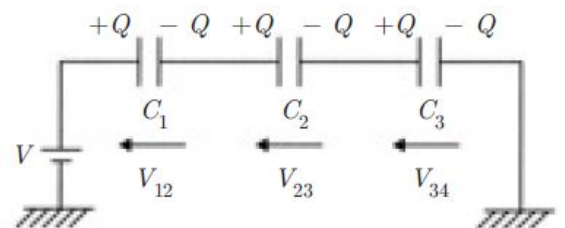
4.9. Association de condensateurs

La charge Q se conserve : toutes les armatures de rang impair portent la même charge $+Q$, toutes les armatures de rang pair la même charge $-Q$:

$$Q = C_1 V_{12} = C_2 V_{23} = C_3 V_{34}$$

Les d.d.p. s'ajoutent pour donner V :

$$V_{12} + V_{23} + V_{34} = V$$



On en déduit :

$$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = V = \frac{Q}{C}$$

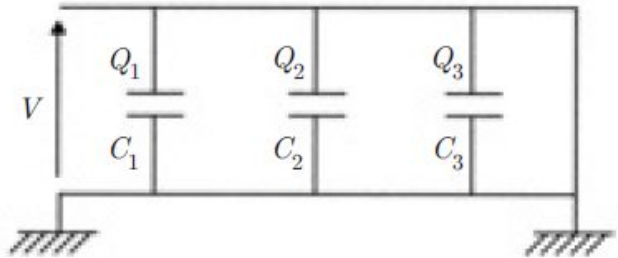
La capacité équivalente est donc donnée par :

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

4.9.2 Association en parallèle

La d.d.p. se conserve ; elle est commune à tous les condensateurs :

$$\begin{cases} Q_1 = C_1 V \\ Q_2 = C_2 V \\ Q_3 = C_3 V \end{cases}$$



Les charges se répartissent différemment, l'ensemble donnant la charge $Q = CV$.

On en déduit :

$$C_1 V + C_2 V + C_3 V = CV$$

D'où la capacité équivalente :

$$\boxed{C = C_1 + C_2 + C_3}$$

Exemple

Une sphère métallique (S_1) de rayon $R_1 = 9$ cm porte la charge positive $Q_1 = 10^{-8} C$.

1) Quels sont la capacité C_1 et le potentiel V_1 de (S_1) ?

2) On relie (S_1) à une autre sphère métallique (S_2) de rayon $R_2 = 1$ cm, par un fil conducteur long et fin. (S_2) est suffisamment éloigné de (S_1) pour négliger l'influence mutuelle de (S_1) et (S_2). Les charges superficielles sur le fil fin sont supposées négligeables.



-Calculer, à l'équilibre, les charges Q'_1 et Q'_2 portées par les deux sphères et la valeur du champ électrique au voisinage de chaque sphère.

Solution

1) On a successivement :

$$C' = 4\pi\epsilon_0 R_1 = \frac{R_1}{K} \quad \text{et} \quad V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = K \frac{Q_1}{R_1}$$

A.N : $C_1 = 10^{-11}\text{F} = 10 \text{ pF} \quad \text{et} \quad V_1 = 10^3 \text{V} = 1 \text{ kV}$

2) La charge Q_1 va se répartir sur les deux sphères de façon qu'à l'équilibre le potentiel soit le même sur les deux sphères.

On a donc :

$$V'_1 = V'_2 \Rightarrow \frac{Q'_1}{R_1} = \frac{Q'_2}{R_2} = \frac{Q'_1 + Q'_2}{R_1 + R_2}$$

avec la condition de conservation de la charge : $Q_1 = Q'_1 + Q'_2$

Par conséquent :

$$Q'_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} Q_1 \quad \text{et} \quad Q'_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} Q_1$$

On en déduit les normes des champs électriques :

$$E'_1 = K \frac{Q'_1}{R_1^2} = \frac{V_1}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad E'_2 = K \frac{Q'_2}{R_2^2} = \frac{V_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

A.N :

$$Q'_1 = 0,9 \cdot 10^{-8} \text{ C} ; \quad Q'_2 = 0,1 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

$$E'_1 = 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} ; \quad E'_2 = 9 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

On retrouve le résultat énoncé dans le cours : près d'un conducteur de faible rayon de courbure le champ électrique est plus intense (pouvoir des pointes).

Chapitre 5

Electrocinétique

5.1. Les charges mobiles

Les charges étudiées en électrostatique sont des charges immobiles. Qu'elles soient liées à l'atome ou qu'elles soient « libres », l'équilibre électrostatique implique qu'elles restent fixes. Quand on veut étudier les charges mobiles, on doit introduire un autre champ, le champ magnétique \vec{B} et aussi une densité de courant \vec{j} rendant compte du déplacement des charges. Relier cette densité de courant \vec{j} en un point d'un conducteur, au champ électrique \vec{E} en ce point, constitue le but de l'électrocinétique.

5.2. Courant électrique

5.2.1 Vecteur densité de courant

Sous l'action d'un champ électrique \vec{E} , chaque électron acquiert une vitesse. En désignant par \vec{v} , la *vitesse moyenne* de l'ensemble des électrons (on dit aussi *vitesse d'entraînement* ou *de dérive*), et par ρ la charge volumique du milieu, on définit le vecteur de courant en tout point du milieu par :

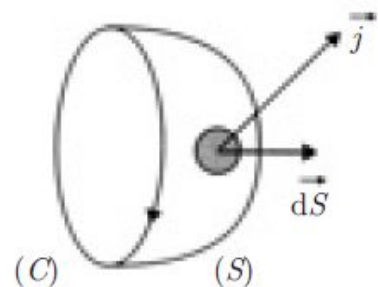
$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

ou encore, puisque $\rho = -ne$ où n est le nombre d'électrons par unité de volume et e la valeur absolue de la charge de l'électron :

$$\vec{j} = -ne\vec{v}$$

5.2.2 L'intensité du courant électrique

Soit Φ le flux de \vec{j} à travers une surface (S) orientée (s'appuyant sur un contour (C) orienté).



On a :

$$\Phi = \int_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

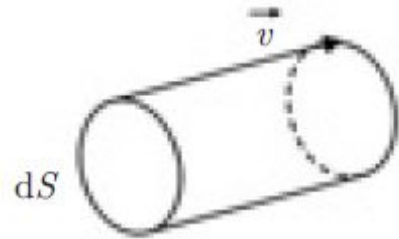
Le flux élémentaire $\vec{j} \cdot \vec{dS} = \rho \vec{v} \cdot \vec{dS}$

c'est aussi la charge qui traverse dS pendant l'unité de temps.

On peut donc écrire :

$$\int_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{dS} = \frac{dQ}{dt} = I$$

Définissant ainsi l'intensité du courant qui traverse (S) , laquelle s'exprime en **ampère (A)** : $1A = 1 C \cdot s^{-1}$.

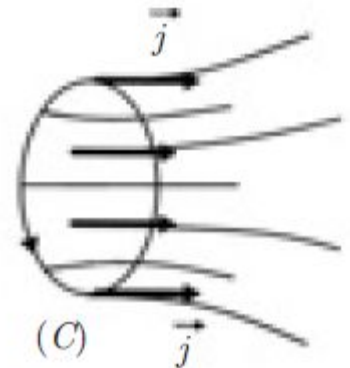


5.2.3 Lignes et tube de courant

Une ligne de courant est définie comme une ligne tangente en tout point au vecteur densité de courant \vec{j} .

Un tube de courant est formé par l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé (C) .

Ses génératrices sont donc tangentes à \vec{j} en tout point.



5.2.4 Différentes formes de conducteurs

a) Conducteurs filiformes

Si la section S d'un conducteur est constante et très petite devant sa longueur, on admet que le vecteur densité de courant est uniforme :

$$j = \frac{I}{S} \quad \text{s'exprime en } A \cdot m^{-2}$$

b) Conducteurs massifs cylindriques

On a : $I = \int_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{dS}$

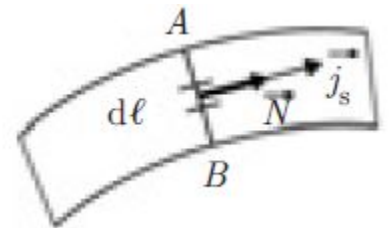
Si \vec{j} est uniforme, on a encore : $j = \frac{I}{S}$ s'exprime en $A \cdot m^{-2}$

c) Nappe de courant

C'est le cas d'un ruban mince ou d'une couche mince. On définit alors une *densité surfacique de courant* (exprimée en $A \cdot m^{-1}$) donnée par :

$$\vec{j}_s = \sigma \vec{v}$$

où σ est la charge libre surfacique. En introduisant la ligne AB , perpendiculaire en tout point à \vec{j}_s , l'intensité du courant le long de la nappe est :



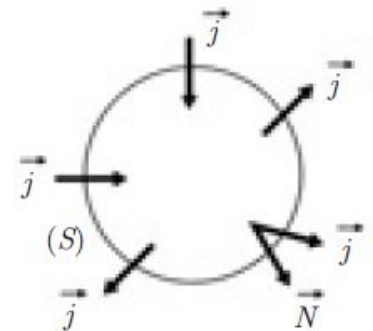
$$I = \int_{AB} \vec{j}_s \cdot \vec{N} dl = \int_{AB} j_s dl$$

Si \vec{j}_s est uniforme, on a :

$$j_s = \frac{I}{AB}$$

5.3. Équation de continuité

Soit S une surface fermée entourant un volume τ d'un conducteur. Supposons que la charge volumique ρ soit une fonction de temps. Pendant un intervalle de temps dt , la *variation* de charge qui en résulte dans un volume *élémentaire* $d\tau$, s'écrit :



$$dq = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\tau$$

d'où la variation de charge pour le volume τ :

$$q = \int_{(\tau)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\tau$$

Par ailleurs, l'intensité du courant traversant un élément de surface \vec{dS} est :

$$dI = \vec{j} \cdot \vec{dS} = \vec{j} \cdot \vec{N} dS$$

où \vec{N} est le vecteur unitaire de la normale sortante. La charge totale transférée pendant le même intervalle de temps est donc :

$$q' = dt \int_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{N} dS$$

ce qui s'écrit, d'après le théorème d'Ostrograsky :

$$q' = dt \int_{(\tau)} \text{div } \vec{j} d\tau$$

La loi de conservation de la charge pour un système isolé entraîne que :

$$q + q' = 0$$

Soit :

$$\int_{(\tau)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \int_{(\tau)} \text{div } \vec{j} d\tau = 0$$

Cela étant vrai pour tout volume (τ), on en déduit que :

$$\boxed{\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Cette équation constitue l'équation de continuité, qui régit tout phénomène de transfert de charges. Elle traduit l'idée que dans un circuit, il ne peut y avoir d'accumulation de charges, ni de courant : c'est la formulation locale de la loi de conservation de la charge électrique.

*** Cas particulier d'un régime stationnaire**

Un régime est dit stationnaire (ou permanent) si la distribution des charges et des courants est indépendante du temps. Par conséquent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Autrement dit, la charge contenue dans le volume $d\tau$ est renouvelée par le passage du courant, sans aucune variation de la charge volumique. C'est le cas du courant continu.

L'équation de continuité se réduit alors à : $\text{div } \vec{j} = 0$

Il en résulte que :

$$\int_S \vec{j} \cdot \vec{N} dS = 0$$

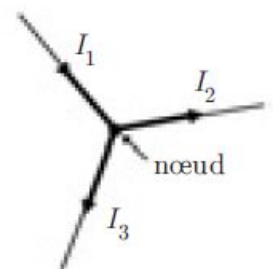
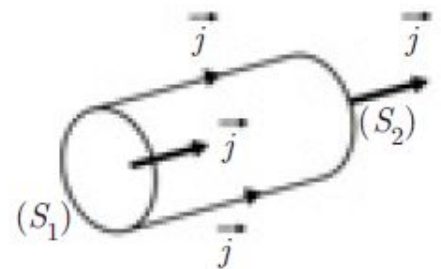
Cette équation exprime que le flux de \vec{j} est conservatif.

En d'autres termes :

– l'intensité du courant se conserve à travers un tube de courant. (S_1) et (S_2) étant deux sections différentes du tube, on a :

$$I(S_1) = I(S_2)$$

– À un noeud de circuit, la somme des courants algébriques (par exemple positifs s'ils arrivent, négatifs s'ils partent) est nulle :



$$\sum_K I_K = 0 \text{ (loi des noeuds)}$$

5.4. Conductivité électrique : loi d'ohm locale

Il s'agit d'exprimer la densité de courant \vec{j} dans un conducteur, en fonction du champ appliqué \vec{E} , en partant tout simplement du principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule de charge q et de masse m .

On suppose la variation de \vec{E} au cours du temps nulle ou faible en chaque point du conducteur (régime stationnaire ou quasi stationnaire).

5.4.1 Premier modèle

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = q\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = \frac{q}{m} \vec{E} t + \vec{V}_0$$

Visiblement, cette vitesse (et par conséquent \vec{j}) tend vers l'infini au cours du temps, ce qui ne peut être satisfaisant. La solution consiste à envisager les « chocs » multiples que subit la charge q dans son mouvement, notamment sur les atomes du réseau cristallin.

Tout d'abord, la vitesse initiale \vec{V}_0 étant aléatoire, sa valeur moyenne \vec{v}_0 est nulle. En désignant par τ le temps moyen séparant deux chocs successifs, la vitesse de dérive s'écrit :

$$\vec{v} = \langle \vec{V} \rangle = \frac{q \vec{E}}{m} \tau$$

On en déduit :

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \frac{n q^2 \tau}{m} \vec{E}$$

Puisque $\rho = nq$ où n est le nombre de charges par unité de volume.

La relation cherchée s'écrit :

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}$$

où :

$$\boxed{\sigma = \frac{n q^2 \tau}{m}}$$

σ est la *conductivité électrique* du matériau, elle s'exprime en siemens par mètre ($S \cdot m^{-1}$).

La loi $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ constitue la loi d'Ohm dans sa forme locale, valable en tout point du conducteur.

5.4.2 Second modèle

Il consiste à introduire l'effet des chocs par l'intermédiaire d'une force de frottement opposée à la vitesse de dérive et de la forme :

$$\vec{f} = -\frac{m \vec{v}}{\tau}$$

Dans ce cas, la loi fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m \vec{v}}{\tau} = q \vec{E}$$

dont la solution est :

$$\vec{v} = \frac{q \tau}{m} \vec{E} + \vec{v}_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Au bout d'un temps suffisant, la charge « relaxe » vers le régime permanent, où l'on a :

$$\vec{v} = \frac{q \tau}{m} \vec{E}$$

5.4.3 La mobilité des porteurs

La mobilité μ est définie par la relation :

$$\boxed{\vec{v} = \mu \vec{E}}$$

et comme

$$\mu = q \frac{\tau}{m} \vec{E}$$

on a :

$$\mu = \frac{q\tau}{m} = \frac{\sigma}{nq}$$

La mobilité définie ainsi est une grandeur algébrique, qui a le même signe de la charge q . Elle s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

5.4.4 Résistivité électrique

La résistivité ρ est définie comme l'inverse de la conductivité :

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{n|q\mu|} \text{ elle s'exprime en } \Omega \cdot \text{m}.$$

5.4.5 Ordres de grandeurs

Pour le cuivre à 20 °C, on a :

$$\rho = 1,72 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \Rightarrow \sigma = 5,8 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

En prenant $n = 10^{29}$ électrons/m³, on trouve :

$$\tau = \frac{\sigma m}{ne^2} = \frac{5,8 \cdot 10^7 \times 9,1 \cdot 10^{-31}}{10^{29} \times (1,6 \cdot 10^{-19})^2} \simeq 2 \cdot 10^{-14} \text{ s}$$

Si on adopte la valeur de la vitesse v calculée au paragraphe 5.2, soit

$v = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, on obtient pour la mobilité :

$$|\mu| = \frac{e\tau}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 2 \cdot 10^{-14}}{9,1 \cdot 10^{-31}}$$

$$\simeq 35 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} = 35 \text{cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

Dans le cas du silicium à 20 °C, les mobilités des électrons et des trous sont respectivement :

$$\mu_e = -1700 \text{cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\mu_t = 250 \text{cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

Les expressions précédentes montrent que la conductivité σ dépend à la fois de la mobilité μ et du nombre n de porteurs par unité de volume.

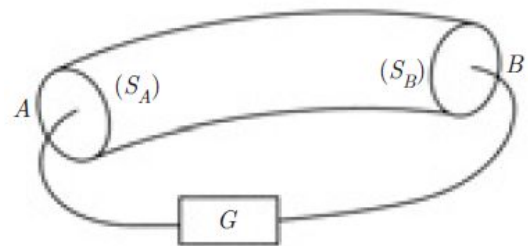
À l'inverse des conducteurs, les semi-conducteurs intrinsèques ont une conductivité σ qui augmente avec la température. À $T = 0$ °K, cette conductivité est nulle.

Dans le cas des matériaux supraconducteurs, la conductivité devient infinie à des températures très basses ($T \leq 7$ °K pour le plomb).

5.5. Résistance électrique :

Loi d'Ohm macroscopique

Considérons un conducteur limité par deux sections (S_A) et (S_B) , portées respectivement aux potentiels V_A et V_B , grâce à un générateur (G) fermant le circuit.



On peut écrire :

$$V_A - V_B = \int_{AB} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_{AB} \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot \vec{dl}$$

En régime stationnaire on peut définir la densité de courant en un point comme :

$$j = \frac{I}{S}$$

où I est l'intensité du courant et S l'aire de la section droite du conducteur en ce point.

On a donc :

$$V_A - V_B = \frac{I}{\sigma} \int_{AB} \frac{dl}{S}$$

En introduisant la résistance R du conducteur donnée par :

$$R = \frac{1}{\sigma} \int_{AB} \frac{dl}{S}$$

qui s'exprime en ohms (Ω) on obtient :

$$\boxed{V_A - V_B = R I}$$

qui constitue la loi d'Ohm macroscopique.

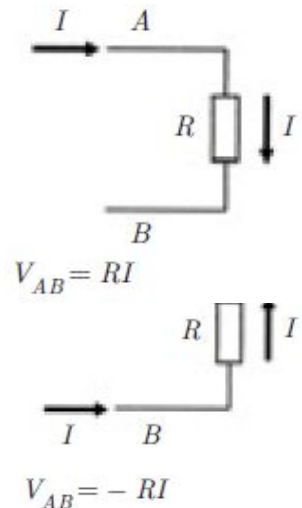
Il convient de bien noter les conventions adoptées pour définir les signes des courants et des d.d.p.

Si $V_A > V_B$, I entre par A et sort par B ; on écrit :

$$V_{AB} = V_A - V_B = R I$$

Si $V_A < V_B$, I entre par B et sort par A . Il convient d'écrire :

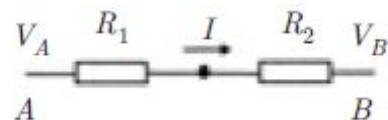
$$V_{AB} = V_A - V_B = -R I$$



5.6. Association de résistances

5.6.1 Résistances en série

On a :



$$V_A - V_B = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2)I$$

Résistance équivalente : $R = R_1 + R_2$

$$R = \sum_k R_k$$

5.6.2 Résistances en parallèle

On a :

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= R_1 I_1 = R_2 I_2 \\ &= R(I_1 + I_2) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\frac{R}{R_1} = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \quad \text{et} \quad \frac{R}{R_2} = \frac{I_2}{I_1 + I_2}$$

D'où :

$$\frac{R}{R_1} + \frac{R}{R_2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k}$$

5.7. Rôle du générateur : force électromotrice

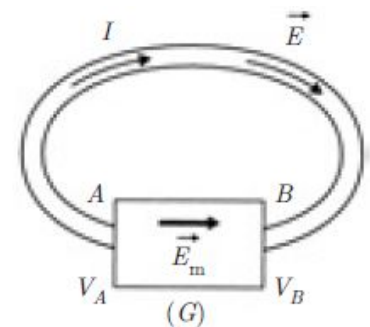
Soit un générateur (G), appliquant une d.d.p. $V_A - V_B > 0$ aux bornes d'un conducteur AB .

En régime stationnaire ou quasi stationnaire, on a

$\text{div } \vec{j} = 0$ en tous les points du circuit, y compris dans le générateur, et les lignes de champ sont des courbes fermées.

Si le conducteur était fermé sur lui-même, on aurait :

Soit :



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{puisque } \vec{E} = -\overline{\text{grad}} V$$

$$\oint \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{ce qui entrainerait } \vec{j} = \vec{0}$$

C'est la circulation de ce champ \vec{E}_m dans le générateur qui assure la d.d.p. $V_A - V_B$.

Cette circulation est appelée *force électromotrice e* du générateur (f.é.m.), bien qu'elle ait les dimensions d'un potentiel. On a :

$$e = \int_{AB} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = V_A - V_B$$

Le champ E_m peut avoir des origines chimiques (piles et accumulateurs) ou magnétiques (f.é.m. induite).

5.8. Les lois de kirchhoff

* Première loi

En un noeud d'un circuit, la somme algébrique des courants est nulle.

$$\sum_k I_k = 0 \quad \text{loi des noeuds}$$

Cette loi, déjà énoncée au paragraphe 5.3, pour illustrer l'équation de continuité, nécessite d'adopter une convention de signe pour les courants (par exemple positifs s'ils arrivent au noeud, négatifs s'ils en partent).

*Deuxième loi

Pour une maille d'un circuit, la somme algébrique des f.é.m. est égale à la somme algébrique des produits RI .

$$\sum_k e_k - \sum_k R_k I_k = 0 \quad (\text{loi des mailles})$$

Convention adoptée : on choisit un sens positif de courant *a priori*. Les courants qui vont dans ce sens sont pris positifs, les autres sont pris négatifs. Les f.é.m. sont considérées comme positives lorsque le courant sort par la borne (+) et négatives dans le cas contraire.

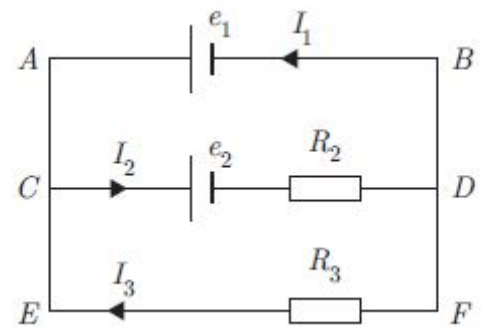
Exemple :

Calcul de courants dans un réseau

On considère le circuit de la figure.

Déterminer les courants I_1, I_2, I_3 , respectivement dans les branches AB, CD, EF .

On se donne arbitrairement les sens de courant indiqués sur la figure.



Loi des noeuds en C :

$$I_2 = I_1 + I_3$$

Maille $CDFEC$:

$$e_2 + R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0$$

Maille $CDBAC$:

$$-e_2 - R_2 I_2 + e_1 = 0$$

La résolution de ce système de 3 équations à 3 inconnues I_1, I_2, I_3 donne :

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)e_1 - R_3 e_2}{R_2 R_3}$$

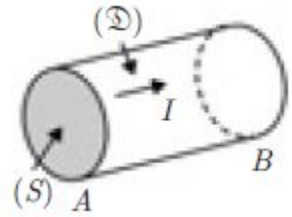
$$I_2 = \frac{e_1 - e_2}{R_2} \quad I_3 = -\frac{e_1}{R_3}$$

À partir de ces expressions, connaissant les valeurs numériques des f.é.m. et des résistances, on peut alors déterminer les véritables orientations des courants.

5.9. Aspect énergétique : loi de joule

Pour un conducteur AB , de résistance R , occupant le volume (D) , traversé par un courant I , on a :

$$\begin{aligned}V_A - V_B &= \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ I &= \int_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \\ (V_A - V_B)I &= \int_{(D)} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau \\ &= \int_{(D)} \rho d\tau = P\end{aligned}$$



Ainsi, quelle que soit la forme du conducteur, on retrouve l'expression bien connue de la loi de Joule :

$$\boxed{P = (V_A - V_B)I = RI^2}$$

Chapitre 6

Electromagnétisme

6.1 Introduction

La force agissant sur une charge ponctuelle q dépend généralement non seulement de la position de cette charge mais également de sa vitesse \vec{v} . Cette force \vec{F} est décomposée en deux composantes, la composante électrique \vec{F}_e (qui ne dépend pas de la vitesse de la charge) et la composante magnétique \vec{F}_m (qui dépend de la vitesse de la charge). Toutes les propriétés de la force magnétique peuvent être décrites par l'introduction de la notion de champ magnétique noté usuellement \vec{B} qui s'exprime en tesla (T). La force magnétique \vec{F}_m est décrite par :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

La force résultante agissant sur la particule chargée est appelée **force de Lorentz**; elle s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q \left[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right]$$

Cette définition est universelle, elle s'applique aussi bien pour les champs stationnaires que pour les champs dépendant du temps et quelle que soit la vitesse \vec{v} . Dans l'approximation non relativiste la force de Lorentz comme toute autre force, ne dépend pas du référentiel d'inertie choisi. Par contre sa décomposition en composante électrique et composante magnétique n'a de signification que si le référentiel d'inertie utilisé est explicitement défini. L'expression de la force de Lorentz peut être considérée comme la définition du champ électrique \vec{E} et du champ magnétique \vec{B} . Le champ magnétique \vec{B} , contrairement au champ électrique \vec{E} , n'exerce aucune force sur une charge immobile.

6. 2 Le champ magnétique

Les expériences montrent que le champ magnétique est créé par des particules chargées en mouvement (courants électriques).

Le champ magnétostatique \vec{B} obéit à deux lois :

1. Le champ magnétique \vec{B} créé par un courant I est donné par le théorème d'Ampère :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

où Γ est une courbe fermée quelconque traversée par le courant électrique I .

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$$

est la perméabilité magnétique du vide. Si le courant I correspond à une distribution de charges électriques mobiles définissant un vecteur densité de courant \vec{j} , alors le courant I encerclé par la boucle fermée Γ est le flux de \vec{j} à travers une surface quelconque délimitée par Γ :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Le théorème d'ampère s'écrit alors :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

En tenant compte du théorème de Stokes :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

on obtient

$$\iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Cette égalité étant vraie quelle que soit la surface S , on **obtient la forme locale du théorème d'Ampère** qui s'écrit :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

6.3 Loi de Biot-Savart

Cette loi permet de calculer le champ \vec{B} créé par un courant I dans un fil, on a :

$$\vec{B} = \frac{I}{c} \int_{(l)} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{U}_r}{r^2}$$

où $d\vec{l}$ est l'élément du fil dans le sens du courant, r est le vecteur dirigé de l'élément $d\vec{l}$ vers le point où on calcule le champ, \vec{U}_r est le vecteur unitaire dirigé suivant r , r est la norme de r . L'intégrale se fait sur toute la longueur du fil.

6.4 Dipôle magnétique

Un petit circuit fermé, de dimensions très petites par rapport à la distance au point d'observation, parcouru par un courant I , constitue un dipôle magnétique, une spire circulaire de rayon b par exemple.

Le nom dipôle provient de l'analogie avec le dipôle électrique. En effet, le champ magnétique créé par ce circuit à une distance très grande a la même forme que le champ électrostatique d'un dipôle électrique (exemple de deux charges $+q$ et $-q$ séparées par une petite distance d) ou il faut remplacer le moment dipolaire électrique p par le moment dipolaire magnétique \vec{m} défini de la manière suivante :

6.4.1 Moment magnétique \vec{m} d'un dipôle

Le moment magnétique d'un dipôle est une caractéristique d'un circuit. Il contient les paramètres dont va dépendre le champ magnétique créé par le circuit. On peut dire que le moment magnétique crée le champ magnétique. Pour un circuit il suffit donc de connaître \vec{m} pour connaître le champ. Le moment \vec{m}

est une quantité très importante et qui reviendra tout au long de ce cours de magnétisme.

Dans le cas général on définit le moment magnétique \vec{m} d'un dipôle par :

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \iiint_{(V)} \vec{r}' \wedge \vec{j}(r') dV$$

Où r' désigne la position de l'élément dV de la source. La densité de courant \vec{j}

Peut dépendre de la position à l'intérieur du volume V .

Dans le cas d'un fil conducteur parcouru par un courant I , limitant une surface (S) de forme quelconque, se réduit à :

$$\vec{m} = \frac{I S}{c} \vec{n}$$

où \vec{n} est la normale à la surface (S) ; le sens de \vec{n} est donné par la règle du pouce et des doigts de la main droite (quand les doigts sont dans la direction du courant, le pouce indique le sens de \vec{n}).

6. 4. 2 Potentiel et champ créés par un dipôle magnétique

Quand on est à une distance loin du dipôle, le champ créé par celui-ci dépend du moment \vec{m} et de la distance au point où on calcule le champ.

Le potentiel \vec{A} est donné par

$$\vec{A} = \frac{\vec{m} \wedge \vec{U}_r}{r^2}$$

Le champ \vec{B} est donné par

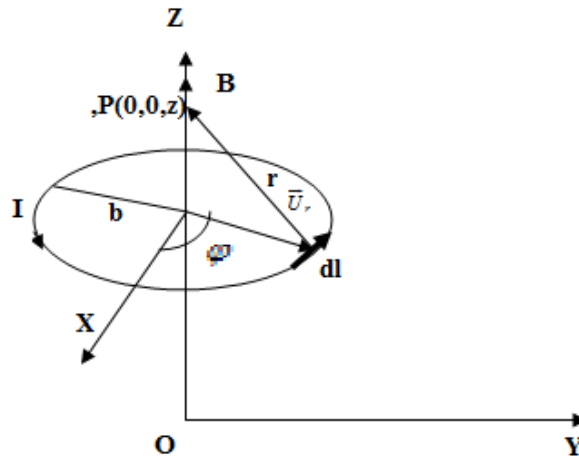
$$\vec{B} = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{U}_r)\vec{U}_r - \vec{m}}{r^3}$$

Où \vec{r} est le vecteur (de module de r) dirigé du centre du dipôle au point où on calcule le champ, \vec{U}_r est le vecteur unitaire suivant \vec{r} .

Exemple d'application

On considère une spire circulaire de rayon b, parcourue par un courant constant I ; le centre de la spire est situé au point $(0,0,z)$.

-Calculer le champ magnétique \vec{B} créé par la spire au point $P(0,0,z)$ su la figure ci-dessous



Solution :

Application la loi de Biot et Savart. On a

$$d\vec{l} = dl \vec{U}_\varphi = dl (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}) \quad \text{avec} \quad dl = b d\varphi$$

D'autre part, on a :

$$\vec{r} = -b \vec{U}_r + (z - z') \vec{k}$$

$$\vec{r} = -b (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) + (z - z') \vec{k}$$

$$d\vec{l} \wedge \vec{U}_r = d\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r}$$

$$d\vec{l} \wedge \vec{U}_r = \frac{bd\varphi}{r} \left[(z - z') \cos \varphi \vec{i} + (z - z') \sin \varphi \vec{j} + b\vec{k} \right]$$

avec $r = \sqrt{b^2 + (z - z')^2}$

l'intégrale se fait de 0 à 2π . L'intégrale sur $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ est nulle ; d'où le champ \vec{B}

$$\vec{B} = \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} \frac{b^2 d\varphi}{r^3} \vec{k}$$

Ce qui donne

$$\vec{B} = \frac{2\pi}{c} \frac{Ib^2}{\left[(z - z')^2 + b^2 \right]^{3/2}} \vec{k}$$