Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Introduction à la Topologie
Licence Mathématiques-LMD-Semestre 3

Série 2: Espaces Topologiques

Exercice 1:

1) Déterminer toutes les topologies possibles sur un ensemble de deux éléments.
2) Même question pour un ensemble de trois éléments.

Exercice 2: Soient $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4\}$
et $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{X}, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ et $A = \{1, 3\}, B = \{2, 4\}$ deux parties de $\mathbb{X}$.
1) Vérifier que $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est un espace topologique.
2) Trouver $Adh(A)$, $Adh(B)$, $Int(A)$, $Int(B)$, A', B'.
3) Trouver $Fr(A)$, $Fr(B)$, $Ext(A)$, $Ext(B)$.
4) Déterminer $\mathcal{V}(1)$, $\mathcal{V}(2)$, $\mathcal{V}(3)$, $\mathcal{V}(4)$.
5) Trouver $Is(A)$ et $Is(B)$.
6) Déterminer $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_B$.
7) $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est-il un espace topologique séparé ?

Exercice 3: Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{Cof})$ où $\mathbb{X}$ est un ensemble infini
et $\mathcal{T}_{Cof} = \{O \subset \mathbb{X} : \complement_{\mathbb{X}} O \text{ est fini }\} \cup \{\emptyset\}$ et $A \subseteq \mathbb{X}$.
1) Montrer que la famille $\mathcal{T}_{Cof}$ est une topologie sur $\mathbb{X}$.
2) Déterminer quels sont les parties fermées de $\mathbb{X}$.
3) Si A est fini trouver: $Adh(A)$, $Int(A)$ et $Fr(A)$.
4) Si A est infini trouver: $Adh(A)$, $Int(A)$ et $Fr(A)$.

Exercice 4: Soit f une application d'un ensemble non vide $\mathbb{X}$ dans un espace topologique $(\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ et soit $\mathcal{T} = \left\{f^{-1}(G) : G \in \mathcal{T}_{\mathbb{Y}}\right\}$.
Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{X}$.

Exercice 5: Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et A, B deux parties de $\mathbb{X}$. Montrer que :

1) $A \subset B$ et A ouverte $\Longrightarrow A \subset Int(B)$. **2)** $A \subset B \Longrightarrow Int(A) \subset Int(B)$.
3) $Int(A) = Int(Int(A))$. **4)** Int(A $\cap$ B)=Int(A)$\cap$ Int(B).
5) Int(A)$\cup$ Int(B)$\subset$ Int(A $\cup$ B). **6)** $A \in \mathcal{V}(B) \Longleftrightarrow B \subset Int(A)$.
7) $Int(\complement_{\mathbb{X}} A) = \complement_{\mathbb{X}} Adh(A)$. **8)** $Adh(\complement_{\mathbb{X}} A) = \complement_{\mathbb{X}} Int(A)$.
9) Fr(A) est une partie fermée.
10) A est à la fois ouverte et fermée $\Longleftrightarrow Fr(A) = \emptyset$.
11) A est ouverte . $\Longleftrightarrow Fr(A) \cap A = \emptyset$.
12) A est fermée $\Longleftrightarrow Fr(A) \subset A$.

Exercice 6: Soient $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$ deux bases pour les topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ respectivement. Montrer que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ si et seulement si pour tout $B \in \mathfrak{B}$ et $x \in B$, il existe $B' \in \mathfrak{B}'$ tel que $x \in B' \subset B$.

Exercice 7: Montrer que $f : (\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}) \longrightarrow (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ est continue dans chacun des cas suivants:

1) $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}) = (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ et $f(x) = x$ **2)** f est constante
3) $\mathcal{T}_{\mathbb{X}} = \mathcal{T}_{Disc}$ **4)** $\mathcal{T}_{\mathbb{Y}} = \mathcal{T}_{Gros}$.

Exercice 8: Montrer que si $f, g : (\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}) \longrightarrow (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ sont continues et $(\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ est **Hausdorff**, alors on a:

1) $A = \{x \in \mathbb{X} : f(x) = g(x)\}$ est fermé dans $\mathbb{X}$.
2) $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{X}\}$ est fermé dans $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Exercice 9: Montrer que tout homéomorphisme est une application ouverte et fermée.

SERIE N° 2 (SOLUTIONS)

M. CHOUGUI Nadhir

Exo1 : 1) Soit $X=\{a,b\}$

$\tau_{Gros}=\{\phi,X\}$, $\tau_{dis}=\{\phi,X,\{a\},\{b\}\}$, $\tau_1=\{\phi,\{a\},X\}$, $\tau_2=\{\phi,\{b\},X\}$.

2) Soit $X=\{a,b,c\}$

$\tau_{Gros}=\{\phi,X\}$ (1)

$\tau_1=\{\phi,\{a\},X\}$ (3)

$\tau_3=\{\phi,\{a,b\},X,\{a\}\}$ (6)

$\tau_5=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$ (3)

$\tau_7=\{\phi,\{a\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},X\}$ (6)

$\tau_{dis}=\mathcal{P}(X)$ (1)

$\tau_2=\{\phi,\{a,b\},X\}$ (3)

$\tau_4=\{\phi,\{a,b\},\{c\},X\}$ (3)

$\tau_6=\{\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},X\}$ (3)

Exo2 : $X=\{1,2,3,4\}$ et $\tau=\{\phi,X,\{3\},\{4\},\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$, $A=\{1,3\}$

$B=\{2,4\}$

1) C_1) On remarque que ϕ et $X\in\tau$.

C_2) ~~On a : $\{3\}\cap\{4\}=\phi\in\tau$, $\{3\}\cap\{3,4\}=\{3\}\in\tau$, $\{3\}\cap\{1,3,4\}=\{3\}\in\tau$~~

On a : $\{3\}\cap\{4\}=\phi\in\tau$; $\{3\}\cap\{3,4\}=\{3\}\cap\{1,3,4\}=\{3\}\cap\{2,3,4\}=\{3\}\in\tau$.

$\{4\}\cap\{3,4\}=\{4\}\cap\{1,3,4\}=\{4\}\cap\{2,3,4\}=\{4\}\in\tau$.

$\{3,4\}\cap\{1,3,4\}=\{3,4\}\cap\{2,3,4\}=\{3,4\}\in\tau$

$\{1,3,4\}\cap\{2,3,4\}=\{3,4\}\in\tau$

C_3) Même travail.

donc (X,τ) est un espace topologique.

2) $Adh A = Adh\{1,3\}=\{1,2,3\}$, $Adh(B)=Adh\{2,4\}=\{1,2,4\}$

$Int(A)=\{3\}$, $Int(B)=\{4\}$, $A'=\{1,2\}$, $B'=\{1,2\}$

3) $Fr(A)=Adh(A)-Int A=\{1,2,3\}-\{3\}=\{1,2\}$.

$Fr(B)=Adh(B)-Int(B)=\{1,2,4\}-\{4\}=\{1,2\}$

$Ext(A)=C_X Adh(A)=\{4\}$, $Ext(B)=C_X Adh(B)=\{3\}$

4) $\mathcal{V}(1)=\{X, \{1,3,4\}\}$, $\mathcal{V}(2)=\{X,\{2,3,4\}\}$ M. CHOUGUI Nadhir.

$\mathcal{V}(3)=\{X,\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3\},\{2,3,4\}\}$

$\mathcal{V}(4)=\{X,\{4\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,3,4\},\{1,2,4\},\{2,3,4\}$

5) $Is(A)=\{3\}$, $Is(B)=\{4\}$

6) $\tau_A=\{A\cap O : O\in\tau\}=\{\phi, A, \{3\}\}$, $\tau_B=\{B\cap O : O\in\tau\}=\{\phi, B, \{4\}\}$

7) On a $\forall V\in\mathcal{V}(1) \wedge W\in\mathcal{V}(2)$, $V\cap W\neq\phi$ donc (X,τ) n'est pas separé.

Exo3 : $\tau_{cof}=\{O\subset X : \complement_X O$ est fini$\}\cup\{\phi\}$.

1) Montrons que τ_{cof} est une topologie sur X.

C_1) $\phi\in\tau_{cof}$ par définition et on a : $\complement_X X=\phi$ est fini don $X\in\tau_{cof}$

C_2) Soit $\{O_i : i\in I\}$ une famille de parties de τ_{cof}. Alors, pour

~~On a~~ tout $i\in I$, on a $\complement_X O_i$ est fini. Ainsi, $\complement_X(\bigcup_{i\in I} O_i)=\bigcap_{i\in I}\complement_X O_i$

est fini car c'est l'intersection des ensembles finis et donc

$\bigcup_{i\in I} O_i\in\tau_{cof}$

C_3) Il suffit de montrer que si $O_1, O_2\in\tau_{cof}$, alors

$O_1\cap O_2\in\tau_{cof}$?

Si $O_1, O_2\in\tau_{cof}$, alors $\complement_X(O_1\cap O_2)=(\complement_X O_1)\cup(\complement_X O_2)$ qui est fini car

c'est l'union de deux finis d'où $O_1\cap O_2\in\tau_{cof}$

et donc τ_{cof} est une topologie sur X.

2) Les fermés de X sont les compléments des ouverts donc les

fermés de τ_{cof} sont les parties finies de X, ou bien X.

4) Si A est fini, alors: | M. CHOUGUI Nadhir |

* $Adh(A) = A$ car A est fermé.

* $Int(A) = \phi$ car c'est le seul ouvert contenu dans A. (les autres ouverts non vide sont infinis)

* $Fr(A) = Adh(A) - Int(A) = A - \phi = A$.

4) Si A est infini, alors:

* $Adh(A) = X$ car c'est le plus petit fermés contenant A.

$Int(A) = A$ si $\complement_X A$ est fini et $Int(A) = \phi$ si $\complement_X A$ est infini

Car si $Int(A) \neq \phi \Rightarrow \exists x \in Int(A) \Rightarrow \exists O_x \in \mathcal{T}_{cof}, x \in O_x \subset A$.

$\Rightarrow \complement_X A \subset \complement_X O_x$, mais $\complement_X O_x$ est fini et $\complement_X A$ est infini ce qui est impossible donc $Int(A) = \phi$ si $\complement_X A$ est infini.

* $Fr(A) = Adh(A) - Int(A) = X - A$ si $\complement_X A$ est fini.

$Fr(A) = Adh(A) - Int(A) = X$ si $\complement_X A$ est infini.

<u>EXO 4</u>. ~~Puisque $Y, \phi \in \mathcal{T}_Y$, on conclut que~~

C_1) puisque $Y, \phi \in \mathcal{T}_Y$, on conclut que $X = f^{-1}(Y) \in \mathcal{T}$ et $\phi = f^{-1}(\phi) \in \mathcal{T}$

C_2) Soit $\{O_i : i \in I\}$ une famille d'ensembles de $\mathcal{T}$. Alors, pour tout $i \in I$ il existe $G_i \in \mathcal{T}_Y$ tels que $O_i = f^{-1}(G_i)$. Donc, $\bigcup_{i\in I} O_i = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(G_i) = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} G_i)$

et puisque $\mathcal{T}_Y$ est une topologie, $\bigcup_{i\in I} G_i \in \mathcal{T}_Y$ d'où $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

C_3) Soit $\{O_i : i = 1, \dots, n\}$ une famille finie d'ensembles de $\mathcal{T}$. Alors, pour tout $i = 1, \dots, n$ il existe $G_i \in \mathcal{T}_Y$ tels que $O_i = f^{-1}(G_i)$. Donc,

$\bigcap_{i=1}^n O_i = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(G_i) = f^{-1}(\bigcap_{i=1}^n G_i)$ et puisque $\mathcal{T}$ est une topologie sur Y

$\bigcap_{i=1}^n G_i \in \mathcal{T}_Y$ d'où $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$

/M. CHOUGUI Nadhir/

EXO5 1) $x \in A$ qui est ouvert, alors $A \in \mathcal{V}(x)$ et puisque $A \subset B$ on conclut que $B \in \mathcal{V}(x)$ et donc $x \in$ ~~B~~ $\mathrm{Int}\, B$ ce qui montre que $A \subset \mathrm{Int}(B)$.

2) Soit $x \in \mathrm{Int}(A)$, alors $A \in \mathcal{V}(x)$ et puisque $A \subset B$ on conclut que $B \in \mathcal{V}(x)$ et donc $x \in \mathrm{Int}(B)$ ce qui montre que $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(B)$.

3) $x \in \mathrm{Int}(A)$, alors $\mathrm{Int}(A) \in \mathcal{V}(x)$ d'où $x \in \mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A))$.
et donc $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) \ldots (*)$.

D'autre part ~~$\mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A))$ $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(I$~~
$\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) \subset \mathrm{Int}(A) \ldots (*)$ par définition.

D'après $(*)$ et $(**)$ on obtient $\mathrm{Int}(A) = \mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A))$.

4) On a : $\left.\begin{cases} A \cap B \subset A \Rightarrow \mathrm{Int}(A \cap B) \subset \mathrm{Int}(A) \\ A \cap B \subset B \Rightarrow \mathrm{Int}(A \cap B) \subset \mathrm{Int}(B) \end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{Int}(A \cap B) \subset \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \ldots (*)$

D'autre part on a :

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \subset \mathrm{Int}(A) \subset A \\ \mathrm{Int}(B) \cap \mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(B) \subset B \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \subset A \cap B$$

$\Rightarrow \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \subset \mathrm{Int}(A \cap B) \ldots (*)$

D'après $(*)$ et $(*)$, on obtient : $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$.

5) On a : $\left.\begin{array}{l} \mathrm{Int}(A) \subset A \\ \mathrm{Int}(B) \subset B \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) \subset A \cup B$

$\Rightarrow \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) \subset \mathrm{Int}(A \cup B)$.

6) $A \in \mathcal{V}(B) \Rightarrow \exists O \in \mathcal{T}$, $B \subset O \subset A$ et donc $B \subset O \subset \mathrm{Int}(A)$
car $\mathrm{Int}(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

7) ~~$x \in \complement_X A$~~ $\Leftrightarrow x \in \mathrm{Int}(\complement_X A) \Leftrightarrow \complement_X(A) \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \exists O_x \in \mathcal{T},\ x \in O_x \subset \complement_X A$
$\Leftrightarrow \exists O_x \in \mathcal{T},\ O_x \cap A = \emptyset \Leftrightarrow x \notin \mathrm{Adh}(A) \Leftrightarrow x \in \complement_X \mathrm{Adh}(A)$.

8) D'après 7) on a : $\mathrm{Int}(\complement_X(\complement_X A)) = \complement_X \mathrm{Adh}(\complement_X A)$ d'où
$\mathrm{Int}(A) = \complement_X \mathrm{Adh}(\complement_X A)$ ce qui montre que :
$\complement_X \mathrm{Int}(A) = \mathrm{Adh}(\complement_X A)$

9) On a : $Fr(A) = Adh(A) \cap Adh(\complement_X A)$ | M. CHOUGUI Nadhir. |

alors $Fr(A)$ est fermée car c'est l'intersection de deux fermées.

10) $\Rightarrow$) A est à la fois ouvert et fermée $\Rightarrow Fr(A) = Adh(A) - Int(A)$

$$= A - A = \emptyset.$$

$\Leftarrow$) $Fr(A) = \emptyset \Rightarrow Fr(A) = Adh(A) - Int(A) = \emptyset$

$\Rightarrow Adh(A) = Int(A)$

$\Rightarrow$ A est ouvert et fermée.

11) $\Rightarrow$) A est ouverte $\Rightarrow Fr(A) = Adh(A) - Int(A) = Adh(A) - A$

$\Rightarrow Fr(A) \cap A = \emptyset.$

$\Leftarrow$) $Fr(A) \cap A = \emptyset \Rightarrow$ ~~$Fr(A) = Ad(Adh(A) \cap \complement_X Int(A)) = \emptyset$~~

$\Rightarrow (Adh(A) \cap \complement_X Int(A)) \cap A = \emptyset.$

$\Rightarrow \complement_X Int A \cap A = \emptyset.$ (car $Adh(A) \cap A \neq \emptyset$)

$\Rightarrow \complement_X Int A \subset \complement_X A.$

$\Rightarrow A \subset Int A.$

$\Rightarrow A = Int$ et donc A est ouverte.

12) $\Rightarrow$) A est fermée $\Rightarrow Fr(A) = Adh(A) - Int(A) = A - Int(A)$

$\Rightarrow Fr(A) \subset A.$

$\Leftarrow$) $Fr(A) \subset A. \Rightarrow Adh(A) - Int(A) \subset A.$

$\Rightarrow Adh(A) \subset A$ (car $Int A \subset A$)

$\Rightarrow Adh(A) = A$ et donc A est fermée.

Exo6: M. CHOUGUI Nadhir

$\Rightarrow$) Supposons que $\tau \subset \tau'$. Soit $x \in B \in \beta \subset \tau$, alors $x \in B \in \tau'$ car $B \in \tau$ et $\tau \subset \tau'$, d'où $x \in B = \bigcup_{B' \in \beta'} B'$ et donc il existe $B' \in \beta'$ tel que $x \in B' \subset B$.

$\Leftarrow$) Soit $O \in \tau$, alors pour tout $x \in O$ il existe $B \in \beta$ tel que $x \in B \subset O$. Mais, par hypothèse il existe $B' \in \beta'$ tel que $x \in B' \subset B$. Donc pour tout $x \in O$ il existe $B' \in \beta'$ tel que $x \in B' \subset O$ d'où $\bigcup_{x \in O} B' \subset O$ ...(*). D'autre part :

$O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subset \bigcup_{x \in O} B'$ ...(*) ce qui montre que $O = \bigcup_{B' \in \beta'} B'$ et donc $O \in \tau'$

Exo7: $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$. est-~~son~~ continue ?

1) $(X, \tau_X) = (Y, \tau_Y)$ et $f(x) = x$. Soit $O \in \tau_Y$, alors $f^{-1}(O) = O \in \tau_X$ donc f est continue.

2) $f = k$. Soit $O \in \tau_Y \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(O) = \phi & \text{si } k \notin O \\ f^{-1}(O) = X & \text{si } k \in O \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(O) \in \tau_X$

donc f est continue.

3) $\tau_X = \tau_{Disc}$. Soit $O \in \tau_Y$, alors $f^{-1}(O) \in \tau_X$ car tout sous ensemble est ouvert dans la topologie discrète.

4) $\tau_Y = \tau_{Gros}$ ~~Soit $O \in \tau_Y$~~ $= \{\phi, Y\}$. On a : $f^{-1}(\phi) = \phi \in \tau_X$ et $f^{-1}(Y) = X \in \tau_X$ et donc f est continue.

Exo8: $f, g : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ sont continues et (Y, τ_Y) est Hausdorff.

1) $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.

Il suffit de montrer que : $C_X A$ est ouvert dans X.

Soit $b \in \complement_X A$ alors $f(b) \neq g(b)$. /M. CHOUGUI Nadhir/

Puisque Y est séparé il existent deux ouverts $U, V \in \mathcal{T}_Y$ tels que $f(b) \in U$ et $g(b) \in V$ et $U \cap V = \emptyset$. Donc $b \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ car f et g sont continues et $U, V \in \mathcal{T}_Y$. De plus on a :

$f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subset \complement_X A$ ce qui montre que $\complement_X A$ est ouvert et donc A est fermé.

2) $\Gamma_f = \{(x, f(x)) ; x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$?

Il suffit de montrer que $\complement_{X\times Y} \Gamma_f$ est ouvert.

Soit $(x,y) \in \complement_{X\times Y} \Gamma_f$ alors : $(x,y) \notin \Gamma_f$ et donc $y \neq f(x)$.

Puisque Y est séparé alors il existent $U, V \in \mathcal{T}_Y$ tels que :

$f(x) \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$. Puisque f est continue alors ~~$x \in f^{-1}(U)$~~ $x \in W = f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$. De plus ~~$W \times V \subseteq X \times Y$~~

$(x,y) \in W \times V \subseteq \complement_{X\times Y} \Gamma_f$. Donc $\complement_{X\times Y} \Gamma_f$ est ouvert ce qui entraîne que Γ_f est fermé.

<u>Exo 3</u> : Soit $f : (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ un homéomorphisme.

1) f est ouvert ? On a : $f^{-1} : (Y, \mathcal{T}_Y) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ est continue.

Soit $O \in \mathcal{T}_X$ et $g = f^{-1} : (Y, \mathcal{T}_Y) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_X)$. On a :

$g^{-1}(O) = \{y \in Y \,/\, g(y) \in O\} = \{y \in Y \,/\, f^{-1}(y) \in O\}$

$= \{y \in Y \,/\, y \in f(O)\} = f(O) \cap Y = f(O)$ et donc $f(O)$ est ouvert car $g = f^{-1}$ est continue.