Université Ferhat Abbas Sétif1
Faculté des Sciences, Département SM
$1^{ère}$ année LMD

Jeudi 17/01/2019

Examen de Mathématiques 1

Durée : 01h30mn

Exercice n° 1. (04 points)

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3^n - 1$ est un multiple de 2.
2. Résoudre l'équation suivante : $\dfrac{\text{ch}(\ln x) + \text{sh}(\ln x)}{2x^2 - 1} = 1$.

Exercice n° 2. (06 points)
Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \arctan(\frac{1}{x^2})$$

1. Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.
2. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0. on note par g son prolongement.
3. Calculer $g'(x)$ pour $x \neq 0$ ainsi que $g'(0)$.
4. Peut-on appliquer le théorème de Rolle à g sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Indication : $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ et $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$

Exercice n° 3. (04 points)
Sur $\mathbb{R} - \{1\}$, on définit la loi $\star$ par : $a \star b = ab - a - b + 2$.

- Montrer que $(\mathbb{R} - \{1\}, \star)$ est un groupe commutatif.

Exercice n° 4. (06 points)

Soit l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (3x + y + z, x + y, 2x + z)$$

1. Déterminer $\ker f$ et Imf. En déduire si f est injective, surjective.
2. Donner une base de $\ker f$ et une base de Imf puis en déduire $\dim \ker f$ et $\dim$ Imf.

Bonne Chance