## Série 3: Espaces métriques

**Exercice 1:**

**1)** Montrer que les applications suivantes définissent des distances sur $\mathbb{R}^n$.

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad d_\infty(x,y) = \sup_{i=1,\dots,n} (|x_i - y_i|),$$

et dessiner les boules unitaires ouvertes $B((0,0),1)$ dans $\mathbb{R}^2$ pour $d_1$ et $d_\infty$.

**2)** Montrer que les applications suivantes sont des distances sur $C[a,b]$.

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt, d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[a,b]} (|f(t) - g(t)|)$$

**Exercice 2:** Soit $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique et $f$ une fonction réelle croissante définie sur $\mathbb{R}_+$ et satisfaisant à :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x+y) \leqslant f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

**1)** Montrer que l'application $d_1 = f \circ d$ est une distance sur $\mathbb{X}$.

**2)** En déduire que les applications suivantes sont des distances sur $\mathbb{X}$.

$$d_2 = \frac{d}{1+d}, \quad d_3 = inf(1,d), \quad d_4 = ln(1+d).$$

**Exercice 3:** Soit $\mathbb{X}$ un ensemble quelconque. Montrer que :

**1)** $\delta(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq y \\ 0 \text{ si } x = y \end{cases}$ est une distance sur $\mathbb{X}$.

**2)** $B(x_0,r) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{si } r \leqslant 1 \\ \mathbb{X} & \text{si } r > 1 \end{cases}$

**Exercice 4:** Soit $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique et $A$ une partie de $\mathbb{X}$. Montrer que les propositions suivantes son équivalentes :
**1)** x est un point d'accumulation de A.
**2)** Tout voisinage $V$ de $x$ contient une infinité de points de A.
**3)** $x \in Adh(A - \{x\})$.

**Exercice 5:** Montrer qu'une intersection finie d'ouverts denses de $X$ est un ouvert dense de $X$.

**Exercice 6:** Soit $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique et $A$ une partie de $\mathbb{X}$. Montrer que $Adh(A) = \{x \in \mathbb{X} : d(x, A) = 0\}$.

**Exercice 7:** Soient $A$ et $B$ deux parties bornées d'un espace métrique $(\mathbb{X}, d)$.
**1)** Montrer que $diam(A) = diam(Adh(A))$.
**2)** Montrer que $diam(A \cup B) \leqslant diam(A) + diam(B) + d(A, B)$.

**Exercice 8:** Soient $d_1$ et $d_2$ deux distances définies sur un ensemble $\mathbb{X}$ telles que pour toute boule ouverte $B_{d_1}$ de centre $x \in \mathbb{X}$ il existe une boule ouverte $B_{d_2}$ de centre $x$ également, telle que $B_{d_2} \subset B_{d_1}$. Montrer que la topologie $\mathcal{T}_{d_1}$ induite par $d_1$ est moins fine que la topologie $\mathcal{T}_{d_2}$ induite par $d_2$, c'est-à-dire $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$.

**Exercice 9:** Soient $d_1$ et $d_\infty$ les deux distances définies sur $C[a, b]$ (voir Exercice 1(2) ). Montrer que la topologie $\mathcal{T}_{d_1}$ induite par $d_1$ est moins fine que la topologie $\mathcal{T}_{d_\infty}$ induite par $d_\infty$, c'est-à-dire $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_\infty}$.