République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Ferhat Abbas Setif1
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques.

Université Ferhat Abbas Sétif 1

POLYCOPIE DE COURS

POUR LA DEUXIEME ANNEE SM

SERIES ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Préparé par

AISSA BENSEGHIR

Année 2017/2018

Table des matières

Avant propos

Ce cours regroupe les notes du module de maths 3 dédié aux étudiants de deuxième année de la filière des sciences de la matière. Il comporte les suites numériques, les suites de fonctions, les séries de fonctions, les séries entières, et les équations différentielles du premier et second ordre. En faisant recours aux différents ouvrages traitant les différents sujets abordés ici, sa préparation prenait beaucoup de temps suite à l'utilisation récurrente de ces références.

Chaque chapitre est suivi d'une liste d'exercices qui sont généralement une illustration d'un point abordé antérieurement. Il est inutile d'insister sur le fait que ces exercices constituent le complément du cours.

Chapitre 1

Suites

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1.1. Une suite de nombres réels est une application

$$\begin{aligned} U : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto U(n) = U_n \end{aligned}$$

cette suite est notée $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1.1.1 Suite convergente

Définition 1.1.2. On dit qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (ou à pour limite) $l \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \qquad \text{tel que} \qquad n \geq N(\epsilon) \Rightarrow |U_n - l| < \epsilon$$

ou encore

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \qquad \text{tel que} \qquad n \geq N(\epsilon) \Rightarrow U_n \in]l - \epsilon, l + \epsilon[$$

Remarque 1.1.3. Si une suite a une limite, cette limite est unique.

Exemple 1.1.4. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = (-1)^n(\frac{n}{n^2+1}) + 2$$

on a $\lim_{n\longrightarrow\infty} U_n = 2$ évident
Si on utilise la définition de la convergence d'une suite et l'on retranscrit sur un graphique, on déduit qu'après un certain rang $N(\epsilon)$, tous les points de la suite sont compris entre $l - \epsilon$ et $l + \epsilon$ et $(l = 2)$.

Remarque 1.1.5. ■ Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l alors $(|U_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l|$. La réciproque est fausse si $l \neq 0$.
Par exemple, $u_n = (-1)^n$ ne converge pas, mais $(|U_n|) = 1$ converge.
■ Si $l = 0$ la réciproque est vraie.
En effet,

$$-|U_n| \leq U_n \leq |U_n| \Longrightarrow U_n \longrightarrow 0 \qquad \text{puisque} \qquad |U_n| \longrightarrow 0.$$

Définition 1.1.6. ★ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si

$$\forall A > 0; \qquad \exists\, N(A)\, / \qquad n \geq N(A) \Rightarrow U_n \geq A.$$

★ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si

$$\forall A < 0; \qquad \exists\, N(A)\, / \qquad n \geq N(A) \Rightarrow U_n \leq A.$$

★ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (respectivement décroissante) si

$$U_n \leq U_{n+1} \quad (U_n \geq U_{n+1})$$

★ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Théorème 1.1.7. *(**Suites monotones**) Toute suite monotone a une limite finie ou infinie*

1. *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante :*

(a) Si l'ensemble $U(\mathbb{N})$ des valeurs de la suite est majoré, alors la suite converge vers la borne supérieure de $U(\mathbb{N})$.

(b) Si $U(\mathbb{N})$ n'est pas majoré alors la suite tends vers $+\infty$.

2. *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante :*

(a) Si $U(\mathbb{N})$ est minoré, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la borne inférieure de $U(\mathbb{N})$.

(b) Si $U(\mathbb{N})$ n'est pas minoré alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tends vers $-\infty$.

Démonstration. **1.** Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante :

(a) Si la partie $U(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}$ est majorée, elle admet une borne supérieure notée s.
ainsi $\forall\epsilon$, $\quad s - \epsilon$ n'est pas un majorant.
Alors $\exists N(\epsilon) \in \mathbb{N})/s - \epsilon < U_{N(\epsilon)} \leq s$
puisque $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que s est majorant, on en déduit que

$$\forall n > N(\epsilon) \qquad s - \epsilon < U_{N(\epsilon)} < U_n < s + \epsilon \Rightarrow |U_n - s| < \epsilon.$$

d'où

$$\forall \epsilon > 0,\, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \qquad \text{tel que} \qquad n \geq N(\epsilon) \Rightarrow |U_n - s| < \epsilon$$

Ainsi on a obtenu la définition de la convergence

(b) Si la partie $U(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}$ n'est majorée, cela signifie que pour tout $A > 0$, A n'est pas un majorant de $U(\mathbb{N})$. Donc il existe un entier $N(A) \in \mathbb{N}/A < U_{N(A)}$, puisque $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on en déduit que pour tout $n \geq N(A)$ alors : $A \leq U_n$. On a obtenu :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \qquad \text{tel que} \qquad n \geq N(\epsilon) \Rightarrow |U_n \geq A$$

ce qui signifie que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

2. Concernant les suites décroissantes, on applique la même démonstration précédente, à la suite croissante $(-U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\square$

Proposition 1.1.8. ***(Opérations sur les limites des suites)*** *Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites U et V respectivement. Soit $\lambda \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{R}$.*
- $\lim\limits_{+\infty}(\lambda U_n + \mu V_n) = \lambda \lim\limits_{+\infty} U_n + \mu \lim\limits_{+\infty} V_n$.
- $\lim\limits_{+\infty}(U_n.V_n) = U.V$
- *Si* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n \neq 0$ *et* $V \neq 0$ *alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = \dfrac{U}{V}$.

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites $+\infty$ et V respectivement, avec V égal à un nombre fini ou $+\infty$.
- $\lim\limits_{+\infty}(U_n + V_n) = +\infty$.
- $\lim\limits_{+\infty}(U_n.V_n) = V.(+\infty)$, *si* $V \neq 0$.
- *Si* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n > 0$ *et* $\lim\limits_{+\infty} V_n = 0$ *alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{V_n} = +\infty$.

Exemple 1.1.9. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $U_n = r^n$
Si $-1 < r < 1$, alors $\lim\limits_{+\infty} r^n = 0$
Si $r = 1$, alors $\lim\limits_{+\infty} r^n = 1$
Si $r > 1$, alors $\lim\limits_{+\infty} r^n = +\infty$
Si $r \leq -1$, alors r^n n'a pas de limite.

Exemple 1.1.10. Somme d'une progression géométrique
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$S_0 = 1$ et $S_n - S_{n-1} = x^n$.
Si $S_0 = 1$, alors

$$\begin{aligned}
&S_1 - S_0 = x \Rightarrow S_1 = 1 + x \\
&S_2 - S_1 = x^2 \Rightarrow S_2 = 1 + x + x^2 \\
&. \\
&. \\
&S_n - S_{n-1} = x^n \Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{\infty} x^k
\end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture de S_n , on calcul :

$$\begin{aligned}
(1-x)S_n = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k &= x\sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} \\
&= x^{n+1} - 1.
\end{aligned}$$

Alors

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ n+1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

On obtient :
Pour $|x| < 1$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n = \dfrac{1}{1-x}$
pour $x > 1$; $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n = +\infty$
Pour $x < -1$; la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Exemple 1.1.11. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

On montre que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

$$\begin{aligned}
&U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

On montre par récurrence que

$$(n+1)! \geq 2^n \qquad \forall n \geq 1$$

Nous avons

$$n = 1 \Rightarrow 2! > 2^1$$
$$n = 2 \Rightarrow 3! \geq 4$$

On suppose que l'inégalité est vraie pour n et on vérifie qu'elle est encore vraie au rang $n+1$.
On a $(n+2)! = (n+2)(n+1)! \geq (n+2).2^n$
Or on a $\forall n \geq 1\,; n+2 \geq 2$.
d'où $(n+2)! \geq 2^{n+2}$
On majore le terme général $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$
$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!}$$

Puisque : $(k+1)! \geq 2^k$ pour $k \geq 0$ alors

$$\frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3!} \leq \frac{1}{2^2}$$
.
.
$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Alors on obtient

$$U_n \leq 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k}$$

Or on a

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - \frac{1}{2^n})$$

Donc

$$U_n \leq 1 + 2(1 - \frac{1}{2^n}) \leq 3 \quad \forall n \geq 1$$

U_n est croissante et majorée alors elle est convergente.

Proposition 1.1.12. ***(Inégalités et limites)*** *Soit une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $l \in \mathbb{R}$ alores :*

1.

$$l < a \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \,/\forall n > N,\, U_n < a$$
$$l > a \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \,/\forall n > N,\, U_n > a$$

2.

$$\exists N \in \mathbb{N} \,/\forall n > N,\, U_n \leq a \Rightarrow l \leq a$$
$$\exists N \in \mathbb{N} \,/\forall n > N,\, U_n \geq a \Rightarrow l \geq a$$

Démonstration. 1. Si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors signifie que :

$$\forall \epsilon > 0,\, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \qquad \text{tel que} \qquad n \geq N(\epsilon) \Rightarrow |U_n - l| < \epsilon$$

On suppose que $l < a$
Puisque l'affirmation précédente est vraie pour tout ϵ ; on choisit $\epsilon = a - l$ ainsi ; on en déduit que :
Si $\epsilon = a - l$,

$$\begin{aligned} \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N},\ /n \geq N(\epsilon) &\Rightarrow |U_n - l| < \epsilon \\ &\Rightarrow -\epsilon < U_n - l < \epsilon \\ &\Rightarrow U_n - l < a - l \\ &\Rightarrow U_n < a \end{aligned}$$

Pour $l > a$ la démonstration est identique.
Suppposons que $l > a$
alors

$$\forall \epsilon > 0,\, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N},\, /\, n > N(\epsilon) \Rightarrow |U_n - l| < \epsilon$$

Pour $\epsilon = l - a$, $\ -\epsilon < U_n < \epsilon$ ce qui donne $a - l < U_n - l$ d'où $U_n > a$ CQFD. 2. Supposons que $\exists N \in \mathbb{N} \,/\forall n > N,\, U_n \leq a$
Supposons que $l > a$ d'après 1. $\exists M \in \mathbb{N} \,/\forall n \in \mathbb{N}, n > M \Rightarrow U_n > a$
pour $n > max(N, M)$ on obtient à la fois $U_n \leq a$ et $U_n > a$. contradiction avec l'hypothèse $l > a$, d'où le résultat. Avec la même méthode on montre le dernier résultat. □

Proposition 1.1.13. ***1.*** *$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers U et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers V alors :*

$$U < V \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n > N,\, U_n < V_n.$$

2. *$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers U et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers V alors :*

$$Si\, \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n > N,\, U_n \geq V_n \Rightarrow U \geq V.$$

3. *$(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l.*
Si $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$; $W_n \geq U_n \geq V_n$ alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

4. *Si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, on a :Si $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$; $V_n \leq U_n$ alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} U_n = +\infty$*

Proposition 1.1.14. *Soit I une partie de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure M et une borne inférieure m. Il existe une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I qui converge vers M (respectivement vers m).*

Exemple 1.1.15. Soit $I = [0, 1[$, on voit que $supI = 1$.
Si $U_n = 1 - \dfrac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star$
On a $\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad U_n \in I$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} U_n = 1$

Proposition 1.1.16. *(Limite d'une suite dans un intervalle fermé) Soit un intervalle fermé I ; ($I = [a, b],] - \infty, b], [a, +\infty[,] - \infty, +\infty[$). Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de points appartenant à I, alors la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans I.*

Remarque 1.1.17. La proposition précédente résulte immédiatement de la proposition 1.2.11,.
Cette proposition est fausse si l'intervalle est non fermé.

Exemple 1.1.18. $U_n = \dfrac{1}{n}$, n'est pas dans $I =]0, 1]$.

Lemme 1.1.19. *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \neq 0$. On suppose que $r = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ existe et que cette limite soit dans $I =]-1, 1[$ alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} U_n = 0$.*

Démonstration. Par hypothèse, on sait que $r = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$, alors $|r| = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right|$ ou

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N},\ /\ n \geq N(\epsilon) \Rightarrow \left| |\frac{U_{n+1}}{U_n}| - |r| \right| \leq \epsilon$$

On choisit $\epsilon = \dfrac{1 - |r|}{2}$
d'où

$$\forall n \geq N(\epsilon),\ \left| |\frac{U_{n+1}}{U_n}| - |r| \right| \leq \frac{1 - |r|}{2}$$
$$|r| - \frac{1 - |r|}{2} \leq \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| \leq \frac{1 - |r|}{2},$$
$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| \leq \frac{1 + |r|}{2}$$

On pose $\rho = \dfrac{1+|r|}{2}$ puisque $r \in]-1,+1[$ alors $0 < \rho < 1$.
Donc $\forall n > N(\epsilon)$ $\left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right| \leq \rho$ d'où $|U_{n+1}| \leq \rho |U_n|$ puis

$$|U_{n+1}| \leq \rho|U_n| \leq |U_{n+1}| \leq \rho^2|U_{n-1}| \leq ..... \leq |U_{n+1}| \leq \rho^{n+1-N(\epsilon}|U_{N(\epsilon}|$$

Or $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \rho^{n+1-N(\epsilon} = 0$ avec $\rho \in]0,1[$.
Alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} |U_{n+1}| = 0$. Donc $-|U_{n+1}| \leq U_{n+1} \leq |U_{n+1}| \Rightarrow \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} U_{n+1} = 0$. □

1.1.2 Suites adjacentes

Définition 1.1.20. Deux suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si ;

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq U_{n+1} \leq V_{n+1} \leq V_n$.

2. $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0$.

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Exemple 1.1.21. Les deux suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ $\quad V_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{k!} + \dfrac{2}{n!}$ sont adjacentes.

1.1.3 Suites extraites

Définition 1.1.22. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, soit $\varphi : n \in \mathbb{N} \longrightarrow \varphi(n) \in \mathbb{N}$ une application strictement croissante. La suite $V_n = U_{\varphi(n)}$ est dite suite extraite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1.1.23. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $U_n = 2^{-n}$, et soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $V_n = 2^{-n^2}$. Alors $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ici $\varphi(n) = n^2$.

Remarque 1.1.24. Une suite qui ne converge pas peut posséder des suites extraites qui convergent.

Exemple 1.1.25. La $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $U_n = (-1)^n$, est divergente, mais la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $V_n = (-1)^{2n}$ converge.

Proposition 1.1.26. *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} = l$ avec l limite fini ou non finie. Alors toute suite extraite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite l.*

Théorème 1.1.27. ***(Bolzano-Weierstrass)*** *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée, c'est-à-dire $\exists(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tels que $\forall n \in \mathbb{N}$; $a \leq U_n \leq b$. Alors il existe une suite extraite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge.*

1.1.4 Suite de Cauchy

La définition des suites de Cauchy va permettre de déterminer la convergence et la divergence d'une suite à partir, uniquement, des termes de cette suite et sans nécessairement connaître la valeur de la limite.

Définition 1.1.28. On appelle suite de Cauchy toute suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie :

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon)\in\mathbb{N},\ /\ n > p > N(\epsilon) \Rightarrow |U_n - U_p| < \epsilon$$

ou encore :

$$\forall\epsilon > 0,\ \forall p\in\mathbb{N},\ \exists N(\epsilon)\in\mathbb{N},\ /\ n \geq N(\epsilon) \Rightarrow |U_{n+p} - U_n| < \epsilon.$$

On dira que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la condition de Cauchy.

Théorème 1.1.29. *Une suite de nombres réels converge vers une limite finie si et seulement si elle est de Cauchy. On dit que $\mathbb{R}$ est complet.*

Exemple 1.1.30. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $U_n = \sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}]\sin(kx)$, est de Cauchy.

1.1.5 Suites complexes

Définition 1.1.31. Une suite de nombres complexes est la donnée d'une application :

$$\begin{aligned} Z : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ n &\longmapsto Z(n) = Z_n = a_n + ib_n \end{aligned}$$

où a_n et b_n sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de Z_n.

Définition 1.1.32. On dit qu'une suite $(Z_n = a_n + ib_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes converge vers le nombre réel $a + ib$ si les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers a et b respectivement.

1.2 Suites récurrentes

1.2.1 Définition

Définition 1.2.1. Soient I un intervalle et f une fonction de I vers $\mathbb{R}$. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N};\ U_{n+1} = f(U_n)$$

Ainsi on a tous les termes de la suite qui sont déterminés par la fonction f et par le premier terme U_0. On dit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente.

1.2.2 Théorème du point fixe

Définition 1.2.2. La fonction f définie sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est dite contractante sur I si

(a) $\exists \rho \in]0,1[\, / \forall x \in I, \forall x' \in I \quad |f(x) - f(x')| \leq \rho |x - x'|$.
ρ est le rapport de contraction défini sue I.

(b) $f(I) \subset I$.

Exemple 1.2.3. On considère la fonction $\forall x \in [\frac{2}{3}, 2], \quad f(x) = \dfrac{2x+6}{3x+2} \qquad f$ est contractante. Laissé au lecteur.

Théorème 1.2.4. ***(Théorème du point fixe)*** *Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et f une fonction contractante de I vers I. Alors f admet un unique point fixe.*

Théorème 1.2.5. ***(Théorème du point fixe appliqués aux suites)*** *Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et f une fonction contractante de I vers I. On considère $U_0 \in I$ et la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*
$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = f(U_n)$.
Alors la limite l de la suite convergente $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans I et l est l'unique solution dans I de l'équation$f(x) = x$.

Théorème 1.2.6. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de I vers $\mathbb{R}$. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence,*
$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = f(U_n)$.
Si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, alors $f(l) = l$.

Exercices

1. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $(U_{2n}$ et (U_{2n+1}) convergent vers la même limite. Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. Montrer que toute suite convergente est bornée.

3. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.

4. Pour tout entier n, on pose $U_n = \dfrac{1}{n} + \cos\dfrac{2n\pi}{3}$.
1. Montrer que la suite (U_n) admet une sous-suite convergente.
2. Déterminer deux sous-suites de (U_n) convergent vers des limites différentes.

5. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \tan\dfrac{n\pi}{2n+1}$
1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n\pi}{2n+1}$ appartient à $[0, \dfrac{\pi}{2}$.
2. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} U_n$.

6. On considère les suites de terme général $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $U_n = \displaystyle\sum_{p=n}^{2n-1}\frac{1}{p}$, $V_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p}$
1. Étudier les variations des suites $U_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
2. Montrer que les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont bornées. Que peut-on déduire.

7. Pour tout entier n non nul on pose : $U_n = \dfrac{1}{1} + ... + \dfrac{1}{n^2}$ et $V_n = U_n + \dfrac{1}{n}$.
Montrer que $\forall n \geq 1$, $\dfrac{1}{n} \leq U_n \leq n$.
2. Montrer que les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

8. Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}(1+x^2)$.
1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = f(U_n)$ est croissante $\forall U_0 \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer le ou les points fixes de f définies par $f(l) = l$.
Étudier la limite de la suite suivant la valeur de U_0.
a) Montrer que si $|U_0| > 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}\star$, $U_n > 1$. Et déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
b) Montrer que si $|U_0| \leq 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ alors $0 \leq U_n \leq 1$. En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Chapitre 2

Séries numériques

2.1 Généralités sur les séries numériques

La notion de suite est intimement liée à celle de "séries", c'est-à-dire liée au problème de la sommation d'une infinité de termes. Ce sont les grecs au $5^{ème}$ siècle Av. J.C ,qui commencèrent à entrevoir la notion d'infini. C'est seulement au $16^{ème}$ siècle que l'infini prendra tout son sens.
La notion de série vient du fait que pour une liste infinie de nombres réelles, c'est-à-dire pour une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on se propose le problème de considérer "la somme" de tous les éléments de cette suite de nombres : $U_0 + U_1 + ... + U_n + ...$ Comment peut-on donner une signification à une somme d'un nombre infini de termes.
Dans ce chapitre, il sera présenté un certain nombre de méthodes permettant de déterminer la nature des séries sans forcément réaliser explicitement le calcul de cette somme infinie.

2.1.1 Définitions

Définition 2.1.1. A toute suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels ou complexes, il est possible d'associer une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N};\ \sum_{k=0}^{n} U_k$
Réciproquement, à toute suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est possible d'associer une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $U_0 = S_0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = S_{n+1} - S_n$.

On appelle série la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'on note : $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ ou par $\sum_{n} U_n$ ou par $\sum U_n$.

Définition 2.1.2. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. La somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ est dite somme partielle de rang n de la série $\sum U_n$.
- La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite suite des sommes partielles de la série $\sum U_n$.

- La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite suite associée à la série $\sum U_n$. U_n est dit terme général de la série $\sum U_n$.

2.1.2 Convergence d'une série

Définition 2.1.3. - Si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'une série $\sum U_n$ est convergente de limite finie S, on dira que la série est convergente et on notera $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n = S$.
- Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, on dira que la série est divergente de premier espèce et on notera $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n = \pm\infty$.
- Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge ni vers une limite finie, ni vers $\pm\infty$, on dira que la série est divergente de deuxième espèce.

Remarque 2.1.4. Toute série finie est convergente puisque, la suite des sommes partielles est constante à partir d'un certain rang.
$S_n = U_0 + U_1 + ... + U_p \qquad \forall n \geq p.$
Remarque 2.1.5. (a) On dit que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ et $\sum\limits_{n\geq n_0} U_n$, où $n \in \mathbb{N}$, sont de même nature.
(b) Dans le cas où la série est convergente, le symbole $S = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ désigne à la fois la série et aussi le résultat de cette série.
(c) La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ converge vers S si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} \,/\!, n \geq N_0 \Rightarrow |S - S_n| \leq \epsilon.$$

On utilise la définition de la convergence d'une suite car la somme partielle $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est autre qu'une suite, et on peut écrire :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} \,/\, n \geq N_0 \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{+\infty} U_k\right| \leq \epsilon.$$

Proposition 2.1.6. *Pour que la série* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *soit convergente, il est nécessaire que la suite associée* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit convergente de limite nulle. Cependant, cette condition n'est pas suffisante, il existe des séries divergentes dont la suite associée* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente vers* 0.

Démonstration. On considère $S = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ et la somme partielle associée, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k$.
On a $S_n - S_{n-1} = S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k - S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} U_k,$

d'où $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} U_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n - \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_{n-1}$.
puisque $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ converge vers S par hypothèse on en déduit que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n = S = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_{n-1}$ donc on obtient $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} U_n = S - S = 0$. CQFD □

Exemple 2.1.7. On considère la série $\sum\limits_{n\geq 0} e^{\frac{1}{n}}$, on sait que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$, donc la série donnée est divergente.

Définition 2.1.8. *a*) On appelle somme de deux séries numériques $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$, la série de terme général $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = U_n + V_n$ d'où $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} W_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n + \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$.
b) On appelle multiplication d'une série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ par un scalaire non nul λ, ($\lambda \in \mathbb{R}^\star$ ou $\lambda \in \mathbb{C}^\star$) la série de terme général $\forall n \in \mathbb{N}$; $W_n = \lambda U_n$ d'où $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} W_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\lambda U_n)$.
c) On appelle produit de deux séries $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série de terme général; $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k V_{n-k}$ d'où $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} W_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\sum\limits_{k=0}^{n} U_k V_{n-k})$.

Proposition 2.1.9. ***(Espace vectoriel des séries convergentes)*** *Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si les séries $(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$ sont convergentes de résultat respectifs U et V , alors :*
- La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (U_n + V_n)$ est convergente de somme $U + V$.
- La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\lambda U_n + \mu V_n)$ avec $(\lambda, \mu \in \mathbb{R} ou \mathbb{C})$ est convergente de somme $\lambda U + \mu V$.

Conséquence 2.1.10. On note que la série complexe $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n + ib_n)$ converge si et seulement si les deux séries réelles $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ convergent.
Alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n + ib_n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n + i \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$

Proposition 2.1.11. *- La somme de deux séries dont l'une est convergente et l'autre est divergente de première espèce, est divergente de première espèce.*
- La somme de deux séries dont l'une est convergente et l'autre est divergente de deuxième espèce, est divergente de deuxième espèce.
- La somme de deux séries dont l'une est divergente de première espèce et l'autre est divergente de deuxième espèce, est divergente de deuxième espèce.
- La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda U_n$ $(\lambda \in \mathbb{R}^\star)$ est de même nature que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$.
- Le produit de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

2.1.3 Séries de Cauchy

Proposition 2.1.12. *Une série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *est convergente si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\ /\ p \geq n \geq N_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=n}^{p} U_k \right| \leq \epsilon$$

ou bien

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \ \exists N_0 \in \mathbb{N}\ /\ n \geq N_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=n}^{n+p} U_k \right| \leq \epsilon$$

2.2 Séries à termes positifs

L'intérêt d'étudier les séries à termes positifs (c'est-à-dire à termes dans $\mathbb{R}_+$) est que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles définies par son terme général : $\forall n \in \mathbb{N};\ \sum_{k=0}^{n} U_k$ est réelle et croissante.
En effet ; $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} U_k - \sum_{k=0}^{n} U_k = U_n \geq 0.$

Proposition 2.2.1. *Une série à terme positifs* $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *est soit convergente, soit divergente de première espèce (de limite* $+\infty$*). De plus, pour que cette série soit convergente, il faut et il suffit que la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des sommes partielles définie par son terme général :*
$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ *soit bornée.*

2.2.1 Critère de comparaison

Proposition 2.2.2. *Soient* $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n$ *deux séries à termes positifs, vérifiant,* $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq V_n$.
a) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n$*, est convergente, alors* $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *est convergente.*
b) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$*, est divergente de première espèce, alors* $\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n$ *est divergente de première espèce.*

Démonstration. a) Si on a $U_n \leq V_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$, on a aussi :

$$U_0 + U_1 + ... + U_n = S_n \leq V_0 + V_1 + ... + V_n = S'_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} V_n = S'.$$

Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n$ converge, alors S' existe et $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ soit majorée donc convergente.
$b)$ évident. $\square$

Proposition 2.2.3. ***(Utilisation des équivalences)*** *Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n$ deux séries à termes positifs.*
Si $U_n \sim_{+\infty} V_n$ alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n$ sont de même nature.

Démonstration. Par hypothèse, on a $U_n \sim_{+\infty} V_n \Leftrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1.$
Donc pour n assez grand on suppose $\frac{1}{2} \leq \frac{U_n}{V_n} \leq \frac{3}{2}$ alors $\frac{1}{2}V_n \leq U_n \leq \frac{3}{2}V_n$ on applique Proposition (2.2.2) pour conclure. $\square$

Exemple 2.2.4. (Série harmonique) La série harmonique est donnée par son terme général $u_n = \frac{1}{n}$. Le terme général tend vers zéro, mais la série diverge. Appliquer Proposition (2.1.12).

Exemple 2.2.5. $U_n = \frac{1}{n\cos^2 n}$ et $V_n = \frac{1}{n}$ on remarque que $V_n \leq U_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n$ diverge d'où la divergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Exemple 2.2.6. $U_n = \arcsin \frac{2n}{4n^2+1}$, $V_n = \frac{2n}{4n^2+1}$.
On a $U_n \sim V_n$ et on pose $V'_n = \frac{1}{2n}$ alors $V_n \sim V'_n$ on voit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} V'_n$ diverge , donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n$ diverge et finalement $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ diverge.

Exemple 2.2.7. $U_n = \frac{\sin^2 n}{n^2}$
On a $U_n \leq \frac{1}{n^2} = V_n$ on sait que $\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n$ converge (Série de Riemann) donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ converge.

Exemple 2.2.8. $U_n = \frac{\cosh \frac{1}{n}}{n}$, et $V_n = \frac{1}{n}$
On voit que $U_n \sim V_n$, mais $\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n$ diverge, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ diverge.

2.2.2 Critère de Cauchy

Proposition 2.2.9. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ une série à termes positifs. On considère $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{U_n} = l$ où $l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.*

a) Si $0 \leq l \leq 1$, *alors la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *est convergente.*
b) Si $l > 1$ *alors la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *est divergente.*
c) Si $l = 1$ *on ne peut pas conclure.*
On note que si $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{U_n} \xrightarrow{>1} 1$ *, alors on peut conclure que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *diverge.*

Démonstration. $a)$ On suppose que : $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{U_n} = l < 1$.
Alors en utilisant la définition de convergence d'une suite , on a

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \;/\; n \geq N_0 \Rightarrow \left| \sqrt[n]{U_n} - l \right| \leq \epsilon.$$

D'où $\sqrt[n]{U_n} \leq l + \epsilon$, on prend $\epsilon = 1 - r \quad / \quad r \in]0,1[$. Alors

$$\forall r \in]0,1[, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \;/\; n \geq N_0 \Rightarrow \sqrt[n]{U_n} \leq r < 1.$$

D'où $U_n \leq r^n$ donc $\sum_{n\geq N_0} U_n \leq \sum_{n\geq N_0} r^n$. Or $\sum_{n\geq N_0} r^n$ est une série géométrique de raison r telle que $0 < r < 1$ donc $\sum_{n\geq N_0} r^n$ converge. En utilisant le critère de comparaison, on conclut que $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est convergente.
$b)$ On suppose que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{U_n} = l > 1$.
Alors

$$\forall r > 0, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \;/\; n \geq N_0 \Rightarrow \sqrt[n]{U_n} \geq r > 1.$$

ou encore

$$\forall r > 0, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \;/\; n \geq N_0 \Rightarrow U_n > r^n.$$

$r > 1 \Rightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} r^n = +\infty$ ce qui implique que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} r^n \neq 0$ donc $\lim_{n\longrightarrow+\infty} U_n \neq 0$ (condition nécessaire), finalement $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ diverge. □

Exemple 2.2.10. Soit la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$.

Nous avons $\sqrt[n]{U_n} = \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{a}{n}}{1+\frac{b}{n}}\right)^n \longrightarrow \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} = l$

Discussion :
Si $b > a$, alors $l < 1$, la série converge.
Si $b < a$, alors $l > 1$, la série diverge.
Si $a = b$, alors $U_n = 1 \nrightarrow 0$ la série diverge.

2.2.3 Critère de D'Alembert

Lemme 2.2.11. *Soient* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *et* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$ *deux séries réelles à terme positifs. Si on a* $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq \dfrac{V_{n+1}}{V_n}$*, alors ;* $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ *, tel que* $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq \alpha V_n$*.*

Démonstration. On remarque que la suite $\left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc elle est majorée par $\dfrac{U_0}{V_0} = \alpha$ par suite $U_n \leq \alpha V_n$. □

Conséquence 2.2.12. Si $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq \dfrac{V_{n+1}}{V_n}$ on applique Proposition (2.2.2) (critère de comparaison).

Théorème 2.2.13. *Soient* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *et* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$ *deux séries réelles à terme positifs telles que :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = l \neq 0$
Alors les deux séries convergent ou divergent en même temps, (de même nature).

Critère de D'Alembert

Théorème 2.2.14. *Soit* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *une série à termes positifs. On considère la série* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$ *définie de telle sorte que,* $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ *de plus on considère* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} V_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = l$ *où* $l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$*.*
a) Si $0 \leq l \leq 1$*, alors la série* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *est convergente.*
b) Si $l > 1$ *alors la série* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *est divergente.*
c) Si $l = 1$ *on ne peut pas conclure.*
On note que si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \xrightarrow{>1} 1$ *, alors on peut conclure que* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *diverge.*

Démonstration. On suppose que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = l < 1$, alors

$$\forall r \in]l, 1[,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N_0,\ \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq r < 1.$$

ou encore

$$\forall r \in]l, 1[,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N_0,\ \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{r^{n+1}}{r^n}.$$

En utilisant Lemme (2.2.11) on en déduit

$$\forall r \in]l,1[,\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\ , \exists \alpha \in \mathbb{R} / \forall n \geq N_0,\ U_n \leq \alpha r^n.$$

D'où $\sum_{n \geq N_0} U_n \leq \alpha \sum_{n \geq N_0} r^n$ on a $\sum r^n$ converge puisque $0 < r < 1$. En utilisant le critère de comparaison , on déduit que $\sum_{n \in \mathbb{N}} U_n$ est convergente.

b) On suppose que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l > 1$,
par la définition de la limite on a

$$\forall r > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq N_0,\ \frac{U_{n+1}}{U_n} \geq r > 1.$$

ou encore

$$\forall r > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq N_0,\ U_{n+1} \geq U_n.$$

Donc la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante , d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ existe, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \neq 0$ d'où $\lim_{n \longrightarrow +\infty} U_n \neq 0$, finalement $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. □

Exemple 2.2.15. Soit la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{n!}$.

On pose $\forall n \geq 1$, $U_n = \frac{n^3}{n!}$, alors $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} . \frac{n!}{n^3} = 0 < 1$. La série converge.

Proposition 2.2.16. *Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs. Supposons que* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{U_n} = l, \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l',$ *alors $l = l'$.*

Démonstration. Supposons $l \neq l'$, et soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a^n U_n$ avec $a > 0$. On a $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{a^n U_n} = al$ et $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{a^{n+1} U_{n+1}}{U_n} = al'$. Si $l > l'$ par exemple ; il existe $a \in]\frac{1}{l}, \frac{1}{l'}[$, (si $l = 0$ on prend $\frac{1}{l'} = +\infty$ d'où, $al' < 1 < al$, alors la série serait convergente d'après le critère de D'Alembert et divergente d'après le critère de Cauchy, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $l = l'$. □

2.2.4 Séries, Intégrales et critère de Riemann

Proposition 2.2.17. *Soit f une fonction décroissante, définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que : $U_n = f(n)$. Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} U_n$ et $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature.*

Démonstration. Nous avons f décroissante , alors $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ et $\forall x \in [n, n+1]$ on a $0 \leq f(x) \leq f(n)$ d'où $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx$ ce qui donne $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$. D'autre part $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ sur $[n-1, n]$ on a $0f(n) \leq f(x)$ d'où $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(n)dx \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx$ ce qui donne $f(n) \leq \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(x)dx$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ on a $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx$

d'où

$$\begin{array}{l}
\displaystyle\int_1^2 f(x)dx \leq f(1) \leq \int_0^1 f(x)dx \\
\displaystyle\int_2^3 f(x)dx \leq f(2) \leq \int_1^2 f(x)dx \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx.
\end{array}$$

Par sommation on obtient

$$\sum_{k=1}^{n+1} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \sum_{k=0}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)dx.$$

d'après la relation de Chasles, on obtient,

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(x)dx.$$

Lorsque $n \longrightarrow +\infty$, on a

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \leq \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

d'où le résultat. □

Proposition 2.2.18. ***(Critère de Riemann)*** *On appelle série de Riemann, une série de la forme* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$ *où* $a \in \mathbb{R}_+^\star$.

a) Si $0 < a < 1$*, la série de Riemann diverge.*

b) Si $a > 1$*, la série de Riemann converge.*

Démonstration. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^a}$ $\forall x \in [1, +\infty[$ on

♦ $f(x) \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in [1, +\infty[$.

♦ f décroissante sur $[1, +\infty[$.

De plus si on a $U_n = f(n) = \dfrac{1}{n^a}$ (les conditions de la Proposition (2.2.17)sont vérifiés), alors $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x^a}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{n^a}dx$ sont de même nature. □

2.3 Séries à termes quelconques

Nous allons étudier dans ce paragraphe le cas de séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ où U_n est complexe ou réel de signe quelconque.

2.3.1 Définition et proposition

Définition 2.3.1. On dira que la série de terme général $U_n \in \mathbb{C}$ est absolument convergente si la série à terme positifs de terme général $|U_n|$*converge.*

Proposition 2.3.2. *Toute série absolument convergente est convergente.*

Démonstration. Pour montrer que la série converge il faut montrer par définition, que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy.
pour $p > q$ on

$$|S_p - S_q| = |\sum_{p=n+1}^{q} U_n| \leq \sum_{p=n+1}^{q} |U_n| \underset{p,q\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

car la série est absolument convergente donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. □

Remarque 2.3.3. Il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes.

Exemple 2.3.4. Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ telle que $U_{2n-1} = \dfrac{1}{2n}$ et $U_{2n} = -\dfrac{1}{2n}$ avec $n \geq 1$.
Alors $|U_n| \sim \dfrac{1}{n}$ donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |U_n|$ diverge, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ n'est pas absolument convergente.
Cependant, $S_{2n} = 0$ et $S_{2n-1} = \dfrac{1}{2n}$ donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ converge de somme nulle.
on dira qu'une série qui converge sans être absolument convergente qu'elle est semi-convergente.

2.3.2 Sommation d'Abel

Théorème 2.3.5. *Soit* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *une série dont le terme général , réel ou complexe, s'écrit sous la forme* $U_n = a_n b_n$ *;*
On suppose que :
1) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est à termes positifs décroissante et tend vers* 0 *quand* $n \longrightarrow +\infty$.
2) Il existe $M \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}$ $|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k| \leq M$.
Alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *est convergente.*

2.3.3 Séries alternées

Définition 2.3.6. On appelle série alternée une série numérique dont le terme général U_n est de la forme $U_n = (-1)^n V_n$, où $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de signe constant.

Exemple 2.3.7. La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ est une série alternée. On l'appelle série harmonique alternée.

Théorème 2.3.8. *Si la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $V_n > 0$, est décroissante et converge vers zéro, alors la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n V_n$ est convergente et sa somme S vérifie l'inégalité : $S_{2p+1} \leq S \leq S_{2p}$.*

Démonstration. On $U_n = (-1)^n V_n$, $V_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ alors
$S_{2p+2} - S_{2p} = V_{2p+2} - V_{2p} \leq 0$, et
$S_{2p+1} - S_{2p-1} = -V_{2p+1} + V_{2p} \geq 0$,
ce qui signifie que la suite $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante.
De plus $S_{2p+1} - S_{2p} = -V_{2p+1} \leq 0$ d'où $S_{2p} - S_{2p+1} \longrightarrow 0$.
Donc les suites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, elles ont une limite commune S vérifiant $S_{2p+1} \leq S \leq S_{2p}$. □

Application Étudier, selon les valeurs de α la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{-1)^n}{n^\alpha}$ avec $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Exercices

Etudier la nature des séries de terme général u_n avec le test de convergence indiqué :

1. Condition Nécessaire de convergence : $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 0$

a. $u_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$

b. $v_n = \sqrt{n^2+n} - n$

c. $w_n = Arc\tan \dfrac{n^3+1}{n^3+2}$

d. $t_n = e^{-\sqrt{n}}$

2. Test de comparaison

a. $u_n = (\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3})^{-n^2}$

b. $v_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$

c. $w_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$

3. Test d'équivalence

a. $u_n = \dfrac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$

b. $v_n = \sin \dfrac{1}{n^3}$

c. $w_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

4. Test de Cauchy

a. $u_n = \dfrac{\ln(n^n)}{(\ln n)^n}, \quad n \geqslant 2$

b. $v_n = (Arc\sin \dfrac{1}{n})^2$

5. Test de d'Alembert

a. $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)^{2n-1}}$

b. $v_n = \dfrac{(n+1)(n+2)....(2n)}{(2n)^n}$

c. $w_n = \dfrac{n^3}{n!}$

Chapitre 3

Suites et séries de fonctions

3.1 Suites de fonctions

3.1.1 Notions générales

De nombreuses fonctions apparaissent comme limites d'autres fonctions plus simples. C'est le cas par exemple de la fonction exponentielle, que l'on peut définir par l'une des deux formules suivantes.
$e^x = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ ou $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
C'est aussi le cas pour des problèmes plus théoriques, comme lorsque l'on construit des solutions d'équations (par exemple différentielles) , on construit souvent par récurrence vers une solution approchées qui convergent vers une solution exacte.
Dans la suite , $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit E Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et I un ensemble quelconque, l'ensemble $\mathcal{F}_E(I)$ des applications définies sur I, à valeurs dans E, est muni des deux opérations scalaires suivantes : l'addition $(f, g) \longrightarrow f + g$ et la multiplication par un scalaire $(\lambda, f) \longrightarrow \lambda f$, définies par :
Si $f, g \in \mathcal{F}_E(I)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
$(\mathcal{F}_E(I), +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 3.1.1. Une suite dans $\mathcal{F}_E(I)$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{F}_E(I)$ qui associe à chaque nombre naturel n une fonction f_n. Elle se note $(f_n)_{n \geq 0}$ ou simplement $(f_n)_n$.

Remarque 3.1.2. • $(f_{n+n_0})_n$ est notée aussi $(f_n)_{n \geq n_0}$
• Dans une suite $(f_n)_n$, les f_n sont supposées avoir le même ensemble de définition.
• La suite $(f_n)_n$ peut être vue comme une suite numérique $(f_n(x))_n$ dépendante du paramètre x, parcourant un ensemble donné.

3.1.2 Convergence simple

La notion de convergence d'une suite de nombres réels ou complexes mène naturellement à celle de convergence en chaque point pour les suites de fonctions définies comme suit.

Définition 3.1.3. Une suite $(f_n)_n$ d'applications $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite simplement convergente sur I s'il existe une application $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $\forall x \in I$; $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = f(x)$
- f est appelée limite simple de $(f_n)_n$.
- Si f existe elle est unique.
On écrit ;

$$\left(\forall x \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = f(x)\right) \Leftrightarrow (\forall x \in I;\, \forall \epsilon > 0;\; \exists N(x,\epsilon)\ /n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon)\,.$$

Remarque 3.1.4. Il faut bien noter que N dépend de x et de ϵ.

Exemple 3.1.5. Une suite numérique est un cas très particulier de suites de fonctions, ici les fonctions sont des constantes.

Exemple 3.1.6. Soit $I =]0,\infty[$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{(n+1)x}$.
Alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = f(x) = 0\ \forall x \in I$.

Exemple 3.1.7. On considère

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}.$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$; $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = e^x$

Théorème 3.1.8. *Soient $(f_n)_n$, et $(g_n)_n$ deux suites dans $\mathcal{F}_E(I)$ simplement convergentes vers f et g respectivement, et $\lambda \in \mathbb{K}$, Alors*

1. *La suite $(f_n + g_n)_n$ converge simplement vers $f + g$.*
2. *La suite $(\lambda f_n)_n$ converge simplement vers λf.*
3. *La suite $(f_n g_n)_n$ converge simplement vers fg.*

Théorème 3.1.9. ***(Critère de Cauchy)*** *Pour qu'une suite $(f_n)_n$ d'applications $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ converge simplement, il faut et il suffit que :*

$$\forall x \in I,\, \forall \epsilon > 0,\, \exists N(x,\epsilon)\,/\,m \geq N(x,\epsilon);\, n \geq N(x,\epsilon) \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| \leq \epsilon.$$

3.1.3 Convergence uniforme

Exemple 3.1.10. Soit $I = [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ fn(x) = x^n$, il est claire que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ telle que,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \ \ x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} .$$

On conclut que :
- Chaque fonction f_n est continue quelque soit n.
- Chaque $(f_n)_n$ converge simplement vers f.
- f n'est pas continue.

C'est pourquoi , il est nécessaire d'utiliser une notion plus précise qui conserve la continuité par passage à la limite, c'est la convergence uniforme.

Définitions

Définition 3.1.11. On appelle norme de la convergence uniforme la norme pour $(f_n)_n$ et f de $\mathcal{F}_E(I)$;

$$\|f_n - f\| = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

Définition 3.1.12. Une suite d'applications $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite uniformément convergente sur I s'il existe une application $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} (\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

ou encore,

$$\forall \epsilon > 0;\ \exists N;\ \forall x;\ \forall n[n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon].$$

ou encore $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0$.

Interprétation

Nous avons $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \Leftrightarrow f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon$. On dit que pour $n > N$, le graphe de f_n est contenu dans une bande de largeur 2ϵ symétrique par rapport au graphe de f.

Proposition 3.1.13. *La convergence uniforme implique la convergence simple.*
En effet ;

$$\forall x, \forall n \ : |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La réciproque est fausse.

Exemple 3.1.14. Soit $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$ avec $x \in [0, \infty[$.On a montré que cette suite converge simplement vers

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} .$$

comme ;

$$\|f_n - f\| = \sup_{x>0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>0} \frac{1}{1+nx} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{1+nx} = 1$$

c'est-à-dire que $\|f_n - f\| \nrightarrow 0$, d'où la convergence n'est pas uniforme.

Critère de Cauchy pour la convergence uniforme

Théorème 3.1.15. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions sur$I$. Pour que la suite $f_n)_n$ soit uniformément convergente sur I vers une fonction f il faut et il suffit que :*

$$\forall \epsilon > 0;\ \exists N;\ \forall n, \forall m; \forall x \in I[n, m > N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon]$$

ou encore

$$\forall \epsilon > 0;\ \exists N;\ \forall n, \forall m; \forall x \in I\,[n, m > N \Rightarrow \|f_n - f_m\| < \epsilon]$$

Exemple 3.1.16. Soit $f_n(x) = \dfrac{2xn}{1+n^2x^2}$ sur $I = [0, 1]$.
Nous avons $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n = f = 0$. Comme la borne supérieure de la fonction $y \longmapsto \dfrac{2y}{1+y^2}$ sur $[0, +\infty[$ est égale à $\dfrac{1}{2}$ pour $y = 1$, on a $\|f_n\| = \sup\limits_I |f| = \dfrac{1}{2}$; Alors $f_n \longrightarrow 0$ simplement mais pas uniformément.

Comment montrer qu'une suite de fonction converge uniformément.

Pour montrer qu'une suite de fonctions $(f_n)_n$ est convergente uniformément :
1- On montre qu'elle est convergente simplement, ce qui permet de définir f.
2- On cherche à majorer $|f_n(x) - f(x)|$ par une suite $(\varepsilon_n)_n$ de nombres réels positifs qui converge vers 0 telle que $(\varepsilon_n)_n$ ne dépend pas de x.

Pour déterminer $(\varepsilon_n)_n$, on a deux méthodes.
$a)$ Majorer $|f_n(x) - f(x)|$ indépendamment de x.
$b)$ Calculer $\sup\limits_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ à l'aide de l'étude de la fonction $|f_n(x) - f(x)|$.

Opérations et convergence uniforme

Théorème 3.1.17. *Soient $(f_n)_n$, et $(g_n)_n$ deux suites dans $\mathcal{F}_E(I)$ uniformément convergentes vers f et g respectivement, et $\lambda \in \mathbb{K}$, Alors*

(i) La suite $(f_n + g_n)_n$ converge uniformément vers $f + g$.

(ii) La suite $(\lambda f_n)_n$ converge uniformément vers λf.

(iii) Si les applications f et g sont bornées, la suite $(f_n g_n)_n$ converge uniformément vers fg.

Remarque 3.1.18. Dans (iii), l'hypothèse (f et g bornées) ne peut pas être omise, sans quoi le théorème est faux.

3.1.4 Propriétés de la convergence uniforme

Continuité

Théorème 3.1.19. *Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}_E(I)$, une suite de fonctions uniformément convergente vers f. Si toutes les fonctions f_n sont continues en x_0, alors f est continue en x_0.*

Démonstration.

$$\text{Soit } \epsilon > 0; \exists N \ /\forall n > N, \forall x \in I; |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{3.1.1}$$

Fixons un entier $n > N$, f_n étant continue en x_0, alors

$$\text{Il existe } \delta > 0 \ /\forall x \in I; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{3.1.2}$$

De (3.1.1) et (3.1.2) on obtient

$$\begin{aligned} \forall x \in I; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| \\ &+ |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \epsilon \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.1.19.1. *Si $f_n \longrightarrow f$ uniformément et si toutes les fonctions f_n sont continues sur I, alors f est continue sur I.*

Remarque 3.1.20. 1) Si une suite de fonctions continues converge vers une fonction non continue, la convergence n'est pas uniforme.
2) Le théorème donne une condition suffisante pour que $f = \lim f_n$ soit continue, mais cette condition n'est pas nécessaire. Il peut arriver que les fonctions f_n étant continues , f soit continue, sans que la convergence soit uniforme.

Exemple 3.1.21. Soit $(f_n)_n$ telle que $I = [0, 2]$.

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^2 & \text{si } \ 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ -nx^2 + 2n & \text{si } \ \dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{2}{n} \\ 0 & \text{si } x \geq \dfrac{2}{n} \end{cases} .$$

Les fonctions f_n sont continues, et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n = f = 0$ simplement.
Car :
Si $x = 0$, $\quad f_n(0) = 0$.
Si $x > 0$, $\quad f_n(x) = 0$ pour tout $n > \dfrac{2}{x}$.
Cependant la convergence n'est pas uniforme puisque :
$\|f_n - f\| = f_n(\dfrac{1}{n}) = n \longrightarrow +\infty$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Exemple 3.1.22. Si une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers f, alors f n'est pas nécessairement continue.
Soit $I = [0, 1]$, et soit $f_n(x) = x^n$
Il est claire que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} .$$

f n'est pas continue.

Exemple 3.1.23. Il existe des suites $(f_n)_n$ qui convergent vers f continue. Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \leq 0 \\ nx & \text{si } \ 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ -nx + 2 & \text{si } \ \dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{2}{n} \\ 0 & \text{si } x \geq \dfrac{2}{n} \end{cases} .$$

- Pour $x \leq 0$, on a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n = 0$
- Pour $x > 0$, on a $n > \dfrac{2}{n} \Rightarrow f_n(x) = 0$ par conséquent $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n = 0$, donc la limite est continue sur $\mathbb{R}$ bien que la convergence n'y soit pas uniforme puisque :
$\|f_n\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = 1$ ne tend pas vers zéro.

Intégration

Théorème 3.1.24. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables sur $I = [a, b]$ convergeant uniformément vers f. Alors*

$$a) \quad f \text{ est intégrable sur } [a, b]$$

$$b) \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)(x)dx.$$

Démonstration. $a)$ Soit $\epsilon > 0$, il existe n tel que :

$$\forall x_i n[a, b] f_n(x) - \frac{\epsilon}{2(b-a)} \leq f(x) \leq f_n(x) + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \tag{3.1.3}$$

car $f_n \longrightarrow f$ uniformément.
La fonction f_n étant intégrable, il existe une subdivision $d = \{x_0, x_1, ..., x_k\}$ de $[a,])$ telle que :

$$\sum_{i=1}^{k} (M_{n_i} - m_{n_i})(x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2} \tag{3.1.4}$$

où $M_{n_i} = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f_n$ et $m_{n_i} = \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f_n$.
En notant $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f$ et $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f$.
Alors (3.1.3) implique pour$1 \leq i \leq k$ que

$$m_{n_i} - \frac{\epsilon}{2(b-a)} \leq m_i \leq M_{n_i} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

Ce qui donne compte tenu de (3.1.4)

$$\sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{k} (M_{n_i} - m_{n_i})(x_i - x_{i-1}) + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Ainsi, f est intégrable.
$b)$ On a pour tout n ; $| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f_n - f|dx \leq \|f_n - f\|(b-a) \longrightarrow 0$. ☐

Remarque 3.1.25. La condition $f_n \longrightarrow f$ uniformément est suffisante mais non nécessaire pour que $\lim\limits_{n \longrightarrow} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Exemple 3.1.26. Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{si} \quad \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 0 < x < \dfrac{1}{n} \end{cases} .$$

Pour $n > \frac{1}{x}$ on a $f_n(x) = 0$ donc $\lim\limits_{n\longrightarrow} f_n(x) = f(x) = 0$
Mais cette convergence n'est pas uniforme car : $\sup\limits_{[0,1]} f_n = 1 \forall n$, cependant $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 = \int_0^1 f(x)dx$
c'est-à-dire, malgré que $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$, mais le convergence n'est pas uniforme.

Dérivation

On aimerait pour pouvoir donner un théorème semblable à celui de la continuité ou celui de l'intégration mais malheureusement , ce n'est pas possible.

Théorème 3.1.27. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continûment dérivables sur $[a,b]$ ($f_n \in C^1[a,b], \mathbb{R}$) vérifiant les propriétés suivantes :*
a) La suite $(f'_n)_n$ converge uniformément vers g sur $[a,b]$.
b) Il existe un point $x_0 \in [a,b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ soit convergente vers une limite l.
Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$ avec $f \in C^1[a,b], \mathbb{R})$ et l'on a $\forall x \in [a,b] f'(x) = g(x)$.
Autrement-dit : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f'_n(x) = \left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\right)'$.

Démonstration. Nous avons $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(t)dt$
D'après (3.1.24,a)) on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \int_{x_0}^{x} f'_n(t)dt = \int_{x_0}^{x} g(t)dt$ uniformément sur $[a,b]$.
Ainsi $(f_n)_n$ converge uniformément vers f définie par :

$$f(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt = l + \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

comme f continûment dérivable, alors $f' = g$. □

3.2 Séries de fonctions

3.2.1 Définitions et propriétés

Définition 3.2.1. Soit $(f_n)_n$) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un ensemble non vide $I \subset \mathbb{R}$, associons à cette suite la suite de fonctions $(S_n)_n$ définie par : $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k$.
On appelle série de fonctions sur (I) de terme général f_n le couple $((f_n)_n, (S_n)_n)$. La

suite $(S_n)_n$ est appelée n-ième somme partielle de la série de fonctions $((f_n)_n, (S_n)_n)$ et sera notée, $\sum f_n$, ou $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ ou $f_0 + f_1 + ...f_n + ...$

Définition 3.2.2. La série $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est appelée reste d'ordre n de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$.

Définition 3.2.3. On dira que $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est convergente en $x_0 \in I$ si la série numérique $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x_0)$ est convergente.
On dira que $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est convergente sur I (ou bien sur une partie $A \subset I$) si la série $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ est convergente en tout point $x \in I$ (respectivement $x \in A$), dans ce cas on dira que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ est simplement convergente sur$i$(respectivement sur A).

On a donc les équivalences suivantes :

$$\sum f_n \text{ converge en } x_0 \Leftrightarrow \sum f_n(x_0) \text{ converge} \Leftrightarrow (S_n(x_0))_n \text{ converge.}$$

$$\sum f_n \text{ converge sur } I \Leftrightarrow \forall x \in I; \sum f_n(x) \text{ converge} \Leftrightarrow (S_n)_n \text{ converge sur } I.$$

Ainsi :
La convergence simple d'une série sur I équivaut à la convergence simple de la suite de ses sommes partielles $(S_n)_n$ sur I.

Définition 3.2.4. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ une série convergente sur I et $(S_n)_n$ la suite de ses sommes partielles. La fonction $S : I \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $S = \lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n$ est appelée somme de la série et est notée $S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$.

Remarque 3.2.5. Les théorèmes généraux relatifs aux séries numériques demeurent vrais, avec les modifications nécessaires, pour les séries de fonctions.

3.2.2 Convergence uniforme

Définition et exemple

Définition 3.2.6. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ une série de fonctions, on dit que cette série est uniformément convergente sur I si la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles est uniformément convergente où $S_n(x) = \sum_{n=0}^{n} f_n(x)$. En cas de convergence, la limite S telle que $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est appelée somme de la série.

Remarque 3.2.7. Ainsi la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur un ensemble E signifie :

$$\forall \epsilon > 0; \exists N; \,/\, \forall n; \forall x \in E \left[n > N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x) \right| < \epsilon \right].$$

Alors la convergence simple s'exprime par :

$$\forall x \in E; \forall \epsilon > 0; \exists N; \,/\, \forall n; \left[n > N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x) \right| < \epsilon \right].$$

On notera : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k = S - S_n$

Exemple 3.2.8. Soit $f_n(x) = x^n$.
Alors $\forall x \neq 1$; $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = 1 + x + ... + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$, cette série converge donc simplement dans $I =]-1, +1[$. vers la fonction $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Cependant la convergence n'est pas uniforme sur $I =]-1, +1[$.
En effet,
$\lim_{x \xrightarrow{<1} 1} (S_n(x) - S(x)) = +\infty$, $\forall n$, donc $\|S_n(x) - s(x)\|$ ne tend pas vers zéro.
Par contre, dans chaque intervalle $[-\delta, \delta]$, avec $0 < \delta < 1$, la convergence est uniforme.

Critère d'Abel pour la convergence uniforme

Théorème 3.2.9. *On considère la série de fonction de terme général f_n. Si f_n s'écrit sous la forme : $\forall x \in I$; $f_n(x) = \varepsilon_n(x) g_n(x)$ avec*
(1) $\forall x \in I$; $\varepsilon_n(x)$ *est décroissante vers* 0.
(2) $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in I} |\varepsilon_n(x)| \right) = 0.$

(3) $\exists M > 0$ *tels que* $\forall x \in I$; $\forall n \in \mathbb{N}$: $\left|\sum_{i=0}^{n} g_i(x)\right| \leq M$.
Alors la série de terme général f_n *converge uniformément sur* I.

Exemple 3.2.10. On considère la série de fonctions complexes de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N};\ \forall x \in I_\delta = [\delta, 2\pi - \delta]\,\text{avec } \delta \in]0, \pi[\text{ et } \alpha \in [0,1[\ f_n(x) = \frac{e^{inx}}{(n+1)^\alpha}$$

On montre que cette série converge uniformément sur I_δ, en utilisant le critère d'Abel.
On pose $\forall x \in I_\delta$; $f_n(x) = \varepsilon_n(x) g_n(x)$, avec $\varepsilon_n(x) = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$ et $g_n(x) = e^{inx}$.
Nous avons
(1) $\varepsilon_n(x)$ décroissante vers 0 car $\alpha \in]0, 1[$.
(2) On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{x \in I_\delta} |\varepsilon_n(x)| = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \text{ et } \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in I_\delta} |\varepsilon_n(x)|\right) = 0$$

(3) $\sum_{i=0}^{n} g_i(x) = 1 + r^{ix} + (e^{ix})^2 ..... + (e^{ix})^n$ qui est une somme d'une série géométrique de premier terme $g_0(x) = 1$ et de raison $q = e^{ix}$, on en déduit que, $\sum_{i=0}^{n} g_i(x) = \dfrac{1 - (e^{ix})^{n+1}}{1 - e^{ix}}$ car $e^{ix} \neq 1 \forall x \in I_\delta$. On doit trouver une majoration de $\left|\sum_{j=0}^{n} g_j(x)\right|$ qui soit indépendante de la variable x et n, puisque $\left|e^{ix(n+1)}\right| = 1$ on en déduit que :

$$\left|\sum_{j=0}^{n} g_j(x)\right| \leq \frac{1 + |e^{ix(n+1)}|}{|1 - e^{ix}|} \leq \frac{2}{|1 - e^{ix}|}.$$

nous avons

$$\begin{aligned}
|1 - e^{ix}| &= \sqrt{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x} = \sqrt{1 - 2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x} \\
&= \sqrt{2 - 2\cos x} = \sqrt{4 \sin^2 \frac{x}{2}} = 2|\sin^2 \frac{x}{2}| \\
&= 2 \sin \frac{x}{2} \text{ car } 0 < \frac{\delta}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \pi - \frac{\delta}{2} < \pi
\end{aligned}$$

Premier cas : $0 < \dfrac{\delta}{2} \leq \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{\pi}{2}$
La fonction sinus est croissante sur $]0, \dfrac{\pi}{2}$, ce qui permet d'en déduire : $|1 - e^{ix}| = 2 \sin \dfrac{x}{2} \geq 2 \sin \dfrac{\delta}{2}$.

Deuxième cas : $\frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \pi - \frac{\delta}{2} < \pi$
La fonction sinus est décroissante sur $[\frac{\pi}{\pi}$, ce qui permet de déduire : $\sin \frac{x}{2} \geq \sin(\pi - \frac{\delta}{2}) > \sin \pi$, or on a $\sin(\pi - \frac{\delta}{2}) = \sin \frac{\delta}{2}$
Ainsi on obtient : $|1 - e^{ix}| = 2 \sin \frac{x}{2} \geq 2 \sin \frac{\delta}{2}$, puisque les inégalité sont les mêmes dans les deux cas, on en déduit que :
$\left| \sum_{j=0}^{n} g_j(x) \right| \leq \frac{2}{2 \sin \frac{\delta}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} = M$. Alors d'après le critère d'Abel, on en déduit que la série de fonction converge uniformément sur I_δ.

3.2.3 Convergence normale

Définition 3.2.11. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, $f_n(x) : I \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une série de fonctions, on dit que cette série est normalement convergente sur I si la série numérique :$\sum_n \|f_n\|$ où $\|f_n\| = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$, est convergente.

Proposition 3.2.12. *Soit* $f_1, f_2 : I \longrightarrow \mathbb{K}$, *alors*

$$\|f_1 - f_2\| \leq \|f_1 - f_2\| \quad \textit{inégalité triangulaire}$$

Démonstration. nous avons

$$\forall x \in I; \; |f_1(x) + f_2(x)| \leq |f_1(x) + f_2(x)| \leq \|f_1\| + \|f_2\|.$$

Par récurrence

$$\|f_1 + f_2 + ... + f_n\| \leq \|f_1\| + \|f_2\| + ... + \|f_n\|.$$

□

Théorème 3.2.13. *Si la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *converge normalement sur* I *; Alors elle est uniformément convergente sur* I.

Démonstration. D'après Proposition (3.2.12) on

$$\forall n, \forall p > 1; \|f_{n+1} + ... + f_{n+p}\| \leq \|f_{n+1}\| + ...\|f_{n+p}\|. \tag{3.2.1}$$

d'où la convergence est uniforme d'après le critère de Cauchy. □

Corollaire 3.2.13.1. *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *;* $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *une série de fonctions ; s'il existe une série numérique à terme positifs convergente* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$*, telle que :* $\forall n; \forall x \in I$, $|f_n(x)| \leq a_n$*, alors la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est normalement convergente sur* I*.*

Exemple 3.2.14. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ telle que ; $f_n(x) = \dfrac{\sin(x^2+n^2)}{x^2+n^2}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$; $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2}$. et on a $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ on sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} n_n$ est convergente, donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est normalement convergente, donc uniformément convergente dans $\mathbb{R}$.

Remarque 3.2.15. La convergence normale est plus forte que la convergence uniforme. Il existe des séries uniformément convergentes qui ne converge pas normalement.

3.2.4 Convergence uniforme et propriétés d'une série de fonctions

Continuité

Théorème 3.2.16. *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *;* $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *une série de fonctions uniformément convergente sur* I*. Si toutes les fonctions* f_n *sont continues en* $x_0 \in I$*, la somme* S *de la série est continue en* $x_0 \in I$*.*

Corollaire 3.2.16.1. *Si toutes les fonctions* f_n *sont continues sur* I *et si* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est uniformément convergente sur* I*, alors la somme est continue sur* I*.*

Remarque 3.2.17. Les hypothèses sont celles du Théorème(3.2.16), on peut donc écrire :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \longrightarrow x_0} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0).$$

Généralisation : Si $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est uniformément convergente sur$I$, et si la limite finie $\lim_{x \longrightarrow x_0} f_n(x) = a_n$ $(x_0 \in I)$ existe quel que soit n, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est convergente et l'on a

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \longrightarrow x_0} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x_0).$$

Remarque 3.2.18. Ce résultat est souvent utilisé pour démontrer qu'une série donnée n'est pas uniformément convergente en démontrant que la fonction somme $(S(x)$ est discontinue en un point.

Exemple 3.2.19. Étudier la convergence uniforme de la série :

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + ... + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + ...$$

Nous avons $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, supposons $x \neq 0$, alors la série est une série géométrique de raison $\frac{1}{1+x^2}$ et de premier terme x^2. Alors $S(x) = x^2 \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$, Si $x = 0$ $S_n(0) = 0$, d'où $\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n(0) = S(0)$, on a d'autre part $\lim_{x\longrightarrow 0} S(x) = 1 \neq S(0)$ donc S est discontinue au point $x = 0$.
Alors la convergence n'est pas uniforme.

Intégration

Théorème 3.2.20. *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, $f_n : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ *une série de fonctions uniformément convergente sur* $[a, b)$. *Si les fonctions* f_n *sont intégrable sue* $[a, b]$, *alors il est de même pour la somme de la série et l'on a,*

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

En outre, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(x)dx$ *converge uniformément sur* $[a, b]$ *vers* $\int_a^x S(t)dt$.

Exemple 3.2.21. Nous avons

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \text{ et } \frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n},$$

convergent uniformément sur chaque intervalle $[a, b] \subset]-1, 1[$, on peut donc les intégrer terme à terme de 0 à x avec $|x| < 1$. Alors,

$$\ln(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n},$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Dérivation

Théorème 3.2.22. *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *;* $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *une série de fonctions dont le terme général* f_n *sont continûment dérivables sur* $[a,b]$ $(f_n \in C^1([a,b],\mathbb{K})$ *.*
Si,
(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est convergente au un point* $x_0 \in [a,b]$*,*
(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$ *est uniformément convergente sur* $[a,b]$*.*
Alors, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *est uniformément convergente sur* $[a,b]$ *et l'on a*
$S' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x).$

Exemple 3.2.23. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ telle que $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^3(1+x^n)}$, $I = [0,1]$; nous avons $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^3}$ car $x^n \leq 1$ donc $\sum \dfrac{1}{n^3}$ est convergente, On a convergence normale d'où la convergence uniforme donc la convergence simple sur $[0,1]$.
La somme est-elle dérivable ?
(i) Les fonctions f_n sont dérivables à dérivées continues sur $[0,1]$.
En effet ; $f'_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{n^2(1+x^n)^2}$
(ii) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge au moin en un point de $[0,1]$.
(iii) La série des dérivées converge uniformément sur $[0,1]$.
En effet ; $|f'_n(x)| = \left|\dfrac{x^{n-1}}{n^2(1+x^n)^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$.
Alors la somme est donc dérivable sur $[0,1]$ et l'on a :

$$\text{Pour } x \in [0,1]\; S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x).$$

Exercices

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on considère la suite de fonction définie sur $[0,1]$ par

$$n \geq 1 \quad f_n(x) = nx^n(1-x)^\alpha$$

a. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ et trouver sa limite.

b. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers sa limite ssi $\alpha > 1$ sur $[0,1]$.

2. Soit $u_n(x) = e^{-nx}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$, le terme général d'une série de fonctions définie sur $[0,+\infty[$. Montrer q'elle converge simplement vers une fonction f dérivable et que $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u'_n(x)$.

3. Montrer que la série de fonction définie par son terme général :
$v_n(x) = \dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{x}{n}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, on note f sa somme.
Exprimer $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ comme somme d'une série numérique.

4. Soit $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2+n^3x^2}$, le terme général d'une série de fonctions.
Montrer qu'elle converge sur tout $\mathbb{R}$ vers une fonction f dérivable.

5. On considère la série de fonctions définie sur $[0,1]$ par le terme général $u_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(\pi x^n)$.

a. Montrer que cette série converge vers une fonction f, uniformément sur tout intervalle $[0,a]$, avec $0 < a < 1$.

b. On note $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{n}\sin(\pi x^n)dx$.
Montrer que la série (v_n) converge, et en déduire que l'intégrale généralisée de f sur $[0,1]$ est convergente. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 \frac{1}{n}\sin(\pi x^n).$$

Chapitre 4

Séries entières

La théorie des séries entières permet d'exprimer la majorité des fonctions usuelles comme somme de séries. On dit qu'une fonction analytique est une série qui peut s'exprimer localement comme série entière convergente. Ceci permet de démontrer des propriétés de ces fonctions, de calculer des sommes compliquées et également de résoudre des équations différentielles.

4.1 Définitions et propriétés

Définition 4.1.1. Une série entière est une série de fonctions avec $U_n(z) = a_n z^n$ où $a_n \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$. a_n est le coefficient d'ordre n, a_0 le terme constant. Par convention, on pose $z^0 = 1\ \forall z \in \mathbb{C}$. Si $U_n(x) = a_n x^n$ où $a_n \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$, on parle de série entière à variable réelle.

Proposition 4.1.2. *- S'il existe $R \in [0, +\infty[$ tel que $|z| < R$, la série de terme général $U_n(z) = a_n z^n$ converge .*
- Si $|z| > R$, la série diverge.
- De plus si $0 \leq |r| < R$, la série converge normalement sur le disque fermé $\overline{D}_r = \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq r\}$.

Remarque 4.1.3. On considère la série entière de terme général $U_n(x) = a_n x^n$.
-S'il existe $R \in [0, +\infty[\cup\{+\infty\}$,)c'est-à-dire que R peut prendre la valeur infinie), tel que $x \in]-R, +R[$, la série de terme général $U_n(x) = a_n x^n$ converge.
- Si $|x| > R$, la série diverge grossièrement.
- Pour la convergence normale, il suffit de prendre $r \in [0, R[$ et $x \in [-r, +r]$.

Définition 4.1.4. R est le rayon de convergence de la série. $\overline{D}_R = \{z \in \mathbb{C}/|z| < R\}$ est le disque de convergence. Par convention, on a $D_0 = \emptyset$ et $D_{+\infty} = \mathbb{C}$.
Dans le cas réel $]-R, R[$ est l'intervalle de convergence.

Proposition 4.1.5. - *Si* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \in [0,+\infty[$ *alors* $R = \dfrac{1}{L}$.
- *Si* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \in [0,+\infty[$ *alors* $R = \dfrac{1}{L}$.

Démonstration. Pour $z \neq 0$, on a

$$\sqrt[n]{|U_n(z)|} = \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \sqrt[n]{|a_n||z^n|} = |z|\sqrt[n]{|a_n|}.$$

On en déduit que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} |z|\sqrt[n]{|a_n|} = L|z|$ avec $z \neq 0$. Ainsi la série de terme général $U_n(z)$ converge si $L|z| < 1$ d'après le critère de Cauchy pour les série numériques.
Si $L \in]0,+\infty[$, alors on a la convergence si $|z| < \dfrac{1}{L}$ et la divergence si $|z| > \dfrac{1}{L}$
- Si $L = 0$ alors on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{|U_n(z)|} = 0$ et $R = +\infty$.
-Si $L = +\infty$ alors on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{|U_n(z)|} = +\infty$ et $R = 0$.
Pour la seconde partie de la démonstration la procédure est identique. □

Exemple 4.1.6. Soit la série entière de terme général $U_n(z) = z^n$. On sait que cette série converge pour $|z|$ et que : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$.

Exemple 4.1.7. Soit la série entière de terme général $U_n(z) = n!z^n$, avec $z \neq 0$. Pour savoir sin cette série converge, on utilise le critère de D'Alembert. Ainsi, on a :

$$\left|\frac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)}\right| = \left|\frac{(n+1)!z^{n+1)}}{n!z^n}\right| = (n+1)|z|.$$

Or $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(n+1)|z| = +\infty$ donc pour tout $z \neq 0$ la série diverge, on dit que le rayon de convergence de cette série entière est 0.

Exemple 4.1.8. Soit la série entière de terme général $U_n(z) = \dfrac{z^n}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$\left|\frac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)}\right| = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}|z| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha |z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|.$$

Donc le rayon de convergence est $R = 1$ ($|z| < 1$).

Exemple 4.1.9. Soit la série entière de terme général $U_n(z) = \dfrac{z^n}{n^{3n}}$.
On a $\sqrt[n]{|U_n(z)|} = \dfrac{|z|}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; Alors le rayon de convergence est $R = +\infty$ (convergence pour tout z).

Exemple 4.1.10. Soit la série entière de terme général $U_n(z) = a^{n\sin(\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{6})}z^n$, avec $(a > 1)$
On a $\sqrt[n]{|U_n(z)|} = a^{\sin(\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{6})}|z|$.
Lorsque $n \in \mathbb{N}$ la fonction $n \longmapsto \sin(\dfrac{2n\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6})$ prend les valeurs $\dfrac{1}{2}$ et -1, on a donc $\sup\limits_{k\geq n} \sqrt[k]{|U_k(z)|} = a^{\frac{1}{2}}|z|$. Or on a $a^{\frac{1}{2}}|z| < 1 \Leftrightarrow |z| < \dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{-\frac{1}{2}}$. Alors $R = a^{-\frac{1}{2}}$.

Remarque 4.1.11. **Étude sur le bord du disque de convergence**
Pour une série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ dont le rayon de convergence R est distinct de 0 et de $+\infty$, la Proposition (4.1.5) laisse , dans le doute, la nature de la série entière en un point z du bord du disque de convergence, c'est-à-dire pour $z \in \mathbb{C}$tel que $z = R$.
Tous les cas peuvent se produire : convergence absolue, semi-convergence, divergence.
Par exemple (1) $U_n(z) = n^\alpha z^n$ avec ($\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$), $R = 1$. Nous avons $|U_n(z)| = n^\alpha$, pour tout z tels que $|z| = 1$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers ∞. La série diverge en tout point du bord du disque de convergence .
(2) $U_n(z) = \dfrac{z^n}{n^\alpha}$ avec ($\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$), $R = 1$. Si $\alpha > 1$, on remarque que $|U_n(z)| = \dfrac{1}{n^\alpha}$ pour $|z|$ la série de Riemann $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ est convergente, par conséquent la série entière est absolument convergente en tout point du bord du disque de convergence. Si $0 < \alpha \leq 1$, étudions les cas $z = \pm 1$, pour $z = 1$ on a la série de Riemann $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ divergente. Si $z = -1$ on a la série alternée $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ convergente .

4.2 Opérations sur les séries entières

On considère les séries entières de terme général $U_n(z) = a_n z^n$ et $V_n(z) = b_n z^n$ de rayon de convergence R_a et R_b respectivement.
• Si on considère la série entière de terme général $W_n(z) = c_n z^n = U_n(z) + V_n(z) = (a_n + b_n)z^n$. Alors $R_c \geq min(R_a, R_b)$, de plus si $R_a \neq R_b$ $R_c = min(R_a, R_b)$.
• Si on considère la série entière de terme général $W_n(z) = d_n z^n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k(z)V_{n-k}(z) = \sum\limits_{k=0}^{n}(a_k z^k)(b_{n-k}z^{n-k}) = z^n \sum\limits_{k=0}^{n}(a - kb_{n-k})$, alors $R_c \geq min(R_a, R_b)$.

Exemple 4.2.1. On considère les séries $S_1 = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} z^n$ et $S_2 = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} -z^n$, On a $U_n(z) = z^n$, $V_n(z) = -z^n$, $(\forall n, a_n = 1, b_n = -1)$, alors $R_a = 1$ et $R_b = 1$.
Donc $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(1 + (-1))z^n = 0$, a pour rayon de convergence

$R_c = +\infty \geq min(R_a, R_b)$.

Exemple 4.2.2. On considère les séries $S_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} z^n$, $R_a = 1$.
On considère la série entière définie de la manière suivante : $b_0 = 1$, $b_1 = -1$, et $\forall n \geq 2, b_n = 0$, on en déduit que : $S_2 = 1 - z$ qui a pour rayon de convergence $R_b = +\infty$. Si on calcul $S = S_1 \times S_2$ on obtient $W_n(z) = d_n z^n = z^n \sum_{k=0}^{+\infty}(a_k b_{n-k})$, on en déduit que : $d_0 = a_0 b_0 = 1$, $d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = -1 + 1 = 0$ et donc $\forall n \geq 1$, $d_n = 0$, $R_d = +\infty$.

4.3 Dérivation et intégration des séries entières

4.3.1 Propriétés

Théorème 4.3.1. *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *une série entière de somme* $f(z)$*. La fonction* $z \longmapsto f(z)$ *est continue dans le disque de convergence de la série.*

Proposition 4.3.2. *Soit la série entière définie par :*
$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *telle que* $x \in]-R, +R[$*, où* R *est le rayon de convergence.*
Si la fonction S *est* $C^{+\infty}$ *sur* $]-R, +R[$ *alors*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Alors, cette nouvelle série a aussi pou rayon de convergence R*.*

Corollaire 4.3.2.1. *Soit la série entière définie par :*
$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *telle que* $x \in]-R, +R[$*, où* R *est le rayon de convergence.*
On pose

$$T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Le rayon de convergence de cette série est lui aussi égal à R*, et* $\forall x \in]-R, +R[$*,* $T'(x) = S(x)$*.*

4.3.2 Applications

1. On connait la série géométrique $\forall x \in]-1,+1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, et on connait une primitive $\int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x)$. La primitive de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est égale à $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Alors on déduit que $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.
De plus

$$\forall x \in]-1,+1[, \ln(1+x) = \ln(1-(1-x)) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

2. On sait que

$$\forall x \in]-1,+1[, \arctan(x) = \frac{1}{2}[\ln(1+x) - \ln(1-x)]$$

$$\arctan(x) = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}+1}{2}\right] \frac{x^n}{n}$$

Pour tout n impair on a $n = 2p+1, \forall p \in \mathbb{N}$

$$\arctan(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^{(2p+1)-1}+1}{2} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}\right] = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} \forall x \in]-1,+1[$$

3. Considérons la fonction $\arctan x$ qui est la primitive de $\frac{1}{1+x^2}$ q qui s'annule en 0. Pour obtenir son développement en série entière $\forall x \in]-1,+1[$ on utilise le résultat précédent, on obtient

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

En intégrant cette série avec $\arctan 0 = 0$ pour déterminer la constante, on obtient

$$\forall x \in]-1,+1[\quad \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

4. On cherche le développement en série entière de la fonction $f(x) = \frac{1}{1-3x+2x^2}$, puisque $1-3x+2x^2 = 2(x-1)(x-\frac{1}{2})$, alors $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-\frac{1}{2}}$, or nous avons

$\dfrac{1}{x-1} = -\dfrac{1}{1-x} = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\dfrac{1}{x-\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{2(x-\frac{1}{2}} = -\dfrac{2}{1-2x} = -2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2x)^n$, avec $-1 < x < 1$.

Donc $f(x) = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n - 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2x)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1-2^{n+1})x^n$ on pose $a_n = (-1-2^{n+1})$, alors $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $R = \dfrac{1}{2}$.

4.4 Développement en séries entières

4.4.1 Propriétés

Si on considère une fonction définie au voisinage de zéro, existe-t-il une série entière et un rayon de convergence r tels que : $\forall x \in]-R,+R[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$?

Remarque 4.4.1. Si f est développable en série entière en zéro, alors f est C^∞ sur un voisinage de zéro.

Proposition 4.4.2. *Si f est développable en série entière en zéro, alors* $\forall x \in]-R,+R[$ $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(x)(0)}{n!} x^n$.

Démonstration. Puisque f est développable en série entière en zéro, alors
$\forall x \in]-R,+R[$ $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ...$
Ainsi on en déduit que $f(0) = 0 = a_0$. Puisque f est développable en série entière, on en déduit que f est C^∞ sur $]-R,+R[$. On dérive la fonction f et aussi son développement en série entière en zéro, on obtient,
$\forall x \in]-R,+R[$, $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 x + 2a_2 x + ... + n a_n x^{n-1} + ...$, donc $f'(0) = a_1$, et $f''(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} = 2a_2 + ... + n(n-1) a_n x^{n-1} + ...$, on déduit que $f''(0) = 2a_2 = 2!a_2$. En réitérant ce procédé, on obtient :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x)(0)}{n!}$ □

Conséquence 4.4.3. - Si la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$ pour tout $x \in]-R,+R[$ avec $R = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.
- Soit l'application f développable en série entière en zéro, si f est paire, il n'y a que des termes de degré pair dans son développement en série entière. Si f est impaire, il n'y a que des termes de degré impair dans son développement en série entière.

Remarque 4.4.4. Si f est indéfiniment dérivable , f est-t-elle développable en série entière ?
Pour répondre à cette question, on est amené à considérer pour une fonction f définie sur $]-R,+R[$ la série $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x)(0)}{n!} x^n$, cette série est dite série de Taylor associée à f.
Plusieurs cas peuvent alors apparaitre.
1. La série de Taylor $S(x)$ est convergente sur $]-R,+R[$ et converge vers f. Alors f est développable en série entière.
2. La série de Taylor $S(x)$ est divergente sur $]-R,+R[$. Alors f n'est développable en série entière.
3. La série de Taylor $S(x)$ est convergente sur $]-R,+R[$ mais ne converge pas vers $f(x)$. Alors f n'est développable en série entière.

Afin de contourner ces différentes difficultés sur le développement en série entière, on utilise la proposition suivante.

Proposition 4.4.5. *On considère une fonction f de classe C^∞ sur $]-R,+R[$ avec $R > 0$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in]-R,+R[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(x)| \leq M$. Alors f est développable en série entière en zéro.*

4.4.2 Applications

1. Pour la fonction $f(x) = e^x$, nous avons $\forall R > 0$, $\forall x \in]-R,+R[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(x)| \leq e^R$. Donc f est développable en série entière en zéro.
$\forall x \in]-R,+R[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, ou $\forall x \in]-R,+R[\quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, avec R quelconque.

2. Soit la fonction $f(x) = e^{ix}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $|f_{(n)}(x)| = |i^n e^{ix}| \leq 1$
Alors ; $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} x^n$. c'est-à-dire que , $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$.
Conséquence : $\forall z \in \mathbb{C}$ on a $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

3. Pour la fonction $f(x) = \cosh x$, puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, alors $\cosh x = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1+(-1)^n}{2}\right] \frac{x^n}{n!}$, si n est impair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 2p+1$ et $\frac{1+(-1)^n}{2} = 0$, si n est pair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$

tel que $n = 2p$, et $\dfrac{1+(-1)^n}{2} = 1$, on en déduit que $\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2p}}{(2p)!}$.

4. Pour la fonction $\sinh x$, on a $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. On obtient $\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$.

5. Pour la fonction $\cos x$, puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, en utilisant le résultat précédent, on en déduit que :
$\cos x = \dfrac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(ix)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-i)^n x^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\dfrac{i^n + (-i)^n}{2}\right]\dfrac{x^n}{n!}$, selon la parité de n on obtient, $\cos x = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!}$, et ceci $\forall x \in \mathbb{R}$, et $n = 2p$.

6. Pour la fonction $\sin x$ on a $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!}$.

Proposition 4.4.6. *Pour $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{N}$, la fonction : $f(x) = (1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$ est développable en série entière sur $]-1, +1[$ et on a $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)}{n!}$.*

Remarque 4.4.7. Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}$, on utilise la formule du binôme de Newton.

Démonstration. Ici on ne majore pas une constante de n. Ceci ne permet pas d'utiliser Proposition (4.4.5). On utilise une autre méthode.
On considère la fonction : $f(x) = (1+x)^\alpha$ sur $]-1, +1[$ et $f(0) = 1$, on a alors, l'équation différentielle suivante

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \frac{\alpha f(x)}{1+x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Réciproquement, si on considère l'équation différentielle

$$(x+1)y' = \alpha y \quad \text{sur} \quad]-1, +1[\quad \text{et} \quad y(0) = 1 \quad \text{comme condition initiale.}$$

On déduit que $f(x) = (1+x)^\alpha$ sur $]-1, +1[$ et $f(0) = 1$ est solution.
Ainsi, on obtient

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1+x)^\alpha \, \text{et}\, f(0) = 1) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1)y' = \alpha y \text{ et } f(0) = 1)\,.$$

On cherche donc les séries entières $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ solution de cette équation différentielle. La condition $y(0) = 1$ donne $S(0) = a_0 = 1$.

On a

$$
\begin{aligned}
&(x+1)y' = \alpha y \\
&\Rightarrow (1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)a_{n+1} + n a_n\right) x^n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n
\end{aligned}
$$

Ainsi on obtient par identification que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} + na_n = \alpha a_n$ ou encore, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{\alpha - n}{n+1} a_n$

En utilisant ce résultat et la condition initiale $a_0 = 1$, on en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Puisque la solution de l'équation différentielle est unique, on obtient ; $\forall x \in]-1, +1[$

$$f(x) = (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)}{n!}$$

$\square$

Exercices

1. Déterminer le domaine de convergence des séries entières données par les termes généraux suivants et étudier la convergence aux bornes, on convient que dans les différents cas z est complexe et x réel.

a. $u_n(z) = \dfrac{z^n}{n^{2n}}$

b. $u_n(z) = \dfrac{z^n}{n^n}$

c. $u_n(z) = \dfrac{n^n z^n}{n!}$

d. $u_n(z) = (1 + in)z^n$

e. $u_n(z) = \dfrac{z^{2n}}{2^n}$

f. $u_n(z) = (n\sqrt{n})z^n$

2. Déterminer le domaine de convergence des séries données par leur terme général,$z \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$

a. $u_n(x) = \dfrac{n!(x+3)^n}{n^n}$

b. $v_n(x) = (1 + \dfrac{1}{n})^{n^2}(x-1)^n)$

c. $w_n(z) = \dfrac{(z-2i)^n}{n3^n}$

d. $s_n(x) = \dfrac{(x+1)^n}{(n+1)ln^2(n+1)}$

e. $t_n(z) = \left(\dfrac{1+2ni}{n+2i}\right)^n z^n$

3. Développer en série de Taylor dans un voisinage de z_0 les fonctions suivantes :

a. $y = z^4 + 3z^3 - z^2 + z + 4 \qquad z_0 = -2$

b. $y = \dfrac{1}{z} \qquad z_0 = 1$

c. $y = e^z \qquad z_0 = -3$

4. On donne l'équation différentielle
$xy'' + y' + xy = 0 \qquad$ (E).
Déterminer la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ dont la somme est solution de (E).

Chapitre 5

Équations différentielles

5.1 Équations différentielles du premier ordre

5.1.1 Généralités

Définition et exemples

Définition 5.1.1. Étant donnée une fonction de trois variables F, on appelle équation différentielle du 1^{er} ordre toute relation de la forme :

$$F(x, y, y') = 0 \tag{5.1.1}$$

entre la variable x, la fonction $y(x)$ et sa dérivée $y'(x)$. La fonction φ, dérivable, est dite solution ou intégrale de l'équation différentielle (5.1.1) sur un ensemble I de $\mathbb{R}$ si $\forall x \in I,\ F(x, \varphi(x), \varphi'(x) = 0$.

Exemple 5.1.2. $y' + y = x$ admet sur $\mathbb{R}$ la solution $\varphi(x) = x - 1$.
$xy' - 1 = 0$ admet sur $\mathbb{R}^\star$ la solution $\varphi(x) = \ln|x|$.

Intégrer une équation différentielle c'est déterminer toutes les solutions en précisant s'il y a lieu l'ensemble de définition de chacune.

Théorème de Cauchy

Si f est continue et possède une dérivée continue par rapport à y sur un ensemble ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, quel que soit le point (x_0, y_0) de Ω, il existe une solution unique $\varphi(x)$ de l'équation $y' = f(x, y)$ définie au voisinage de x_0 et tel que $y(x_0) = y_0$.
Pour x_0 donné la solution dépend de y_0.
L'ensemble des solutions d'une équation différentielle du 1^{er} ordre dépend d'une constante arbitraire λ, $y_\lambda = \varphi(x, \lambda)$.
Cet ensemble de solutions sera appelé **Intégrale générale.**

En donnant des valeurs particulières pour λ on obtient des solutions particulières. La condition $y(x_0) = y_0$ est appelée condition initiale.

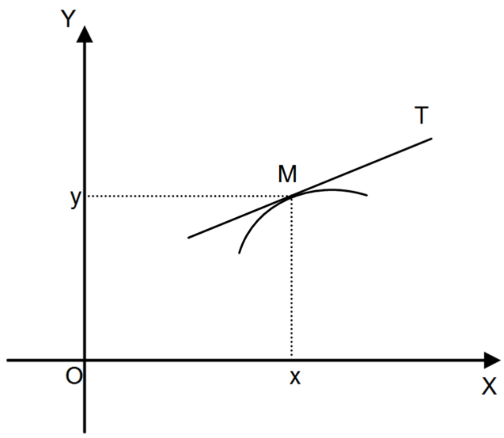
Exemple 5.1.3. Intégrer l'équation différentielle $y - y' = 0$, telle que $y(1) = 1$.
$y' - y = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{y} = dx$ d'où $y = \lambda e^x$, or $y(1) = 1 \Leftrightarrow 1 = \lambda e$ ce qui donne $\lambda = \dfrac{1}{e}$.
Donc la solution de l'équation générale est donné par $y = e^{x-1}$.

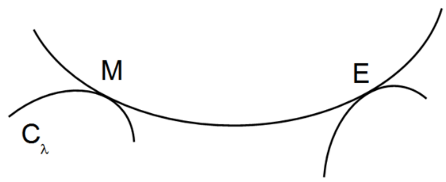
Interprétation géométrique de la solution d'une équation du 1^{er} ordre

a) <u>Éléments de contact</u> : Soit $y = f(x, y)$.
Si f vérifie les hypothèses de Cauchy elle définie une application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui associe à chaque couple (x, y) la dérivée y'.

$M(x, y) \in \Omega \longrightarrow (MT)$ tel que (MT) est le coefficient directeur y'.
(M, MT) est un élément de contact.

La donnée d'une équation du 1^{er} ordre définit ainsi un " champ" d'éléments de contact dans le plan, une courbe (C) étant courbe intégrale si l'ensemble de ses éléments de contact appartient au champ précédent.

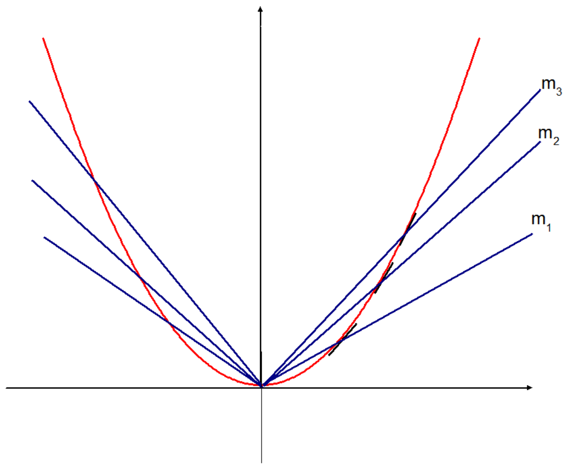




b) <u>Intégration graphique</u> : La construction des éléments de contact voisins fait apparaitre un contour polygonal qui permet un tracé approximatif des courbes intégrales, c'est le principe d'intégration graphique.
Ce tracé est d'ailleurs facilité par la construction préliminaire des isoclines, ensemble des points des courbes intégrales en lequel la tangente a un coefficient directeur donné m.
L'équation cartésienne des courbes s'écrit donc $f(x, y) = m$.

Exemple 5.1.4. Soit l'équation différentielle $xy' = 2y$.
Les isoclines d'équation $y = \dfrac{m}{2}x$ sont des droites passant par l'origine.

$\dfrac{dy}{y} = 2\dfrac{dx}{x} \Leftrightarrow y = \lambda x^2$.
Les courbes intégrales sont des paraboles de sommet O et d'axe (oy).



Équation différentielle attachée à une famille de courbes

On a vu que les courbes intégrales d'une équation différentielle du 1^{er} ordre dépendant d'un paramètre.
Réciproquement une famille de courbes C_λ dépendant d'un paramètre λ et définies par l'équation

$$f(x, y, \lambda) = 0 \tag{5.1.2}$$

En tout point $M(x, y)$ d'un certain ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ passe au moins une courbe C_λ. Le coefficient directeur y' de la tangente en M étant donnée par

$$f'_x(x, y, \lambda) + f'_y(x, y, \lambda)y' = 0 \tag{5.1.3}$$

L'amélioration de λ entre les équations (5.1.2) et (5.1.3) donne une relation qui définit les éléments de contact des courbes C_λ. $F(x, y, y') = 0$, cette relation représente l'équation différentielle de la famille de courbes considérées.

Exemple 5.1.5. Soit le faisceau de cercles à points de base A et B d'équation

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y = 1 \tag{5.1.4}$$

En dérivant par rapport à x , on obtient $2x + 2yy' - 2\lambda y' = 0$ l'élimination de λ donne $(x^2 + y' - 2y - 1)y' - 2x = 0$ l'équation différentielle de faisceau.

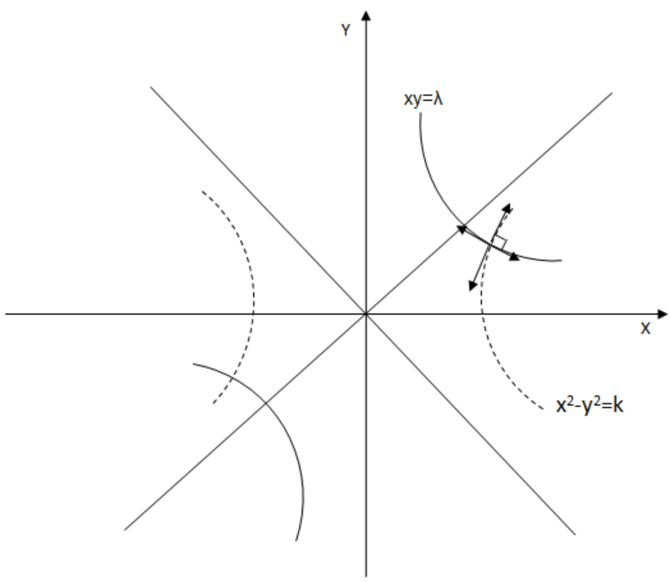
1. La discussion de nombre de solutions $y' = 0$, en y' de $F(x, y, y') = 0$ donne le nombre de courbes intégrales passant par un point et permet un régionnement du

plan.
2. L'équation $F(x, y, 0)$ correspond à l'isocline de coefficient directeur nul $y' = 0$, représente le lieu des points à tangente parallèle à (ox) des courbes intégrales.
3. **Les trajectoires orthogonaux** des courbes C_λ sont solution de l'équation différentielle $F(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0$ obtenue en changeant y' en $-\frac{1}{y'}$ dans l'équation différentielle des C_λ, la tangente en $M(x, y)$ de C_λ a pour pente $m = y' = f(x, y)$, s'il existe une courbe Γ orthogonale en M à C_λ, la tangente a pour pente $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{y'}$. L'équation différentielle des courbes Γ s'écrit donc $-\frac{1}{y'} = f(x, y)$ ou $F(x, y, -\frac{1}{y'} = 0$.

Exemple 5.1.6. Trajectoires orthogonales de la famille d'hyperboles H_λ d'équations $xy = \lambda$.
L'équation des hyperboles s'écrit $xy' + y = 0$.
L'équation des trajectoires orthogonales est donc C telle que :
$-x\frac{1}{y'} + y = 0$ ou $x - yy' = 0$.
Cette équation s'intègre directement sous la forme,

$$x - yy' = 0 \Rightarrow x = yy' \Leftrightarrow x = y\frac{dy}{dx}$$
$$xdx = ydy \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + k$$
$$\Rightarrow x^2 - y^2 = k$$

Les trajectoire orthogonales sont donc une famille d'hyperboles de centre O et d'axes (ox) et (oy).



5.1.2 Intégration des équations différentielles du 1^{er} ordre

Équation à variables séparables

On appelle équation différentielle à variables séparables une équation du 1^{er} ordre pouvant s'écrire sous la forme

$$y' = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{ou} \quad g(y)dy = f(x)dx$$

les fonctions f et g sont supposées continues, d'où

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + \lambda \quad \text{on obtient} \qquad G(y) = F(x) + \lambda$$

Exemple 5.1.7.

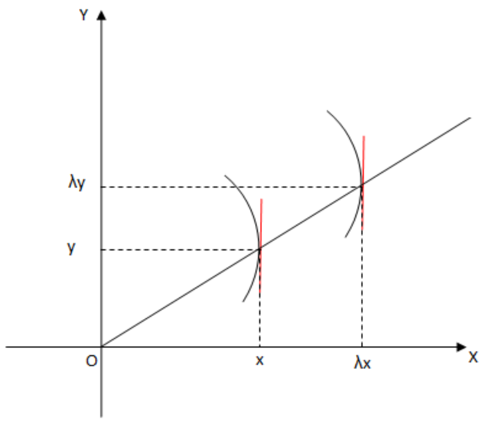
$$\begin{aligned}
&y' + y = a, \quad a \in \mathbb{R} \\
&\frac{dy}{dx} = a - y \Rightarrow \frac{dy}{a-y} = -dx \\
&\ln|y-a| = x + \lambda \quad \text{on} \;\; \text{obtient} \quad y = a + Ce^{-x}
\end{aligned}$$

Exemple 5.1.8.

$$\begin{aligned}
&y - 2xy' = 1, \\
&y' = \frac{y-1}{2x} \Rightarrow \frac{dy}{y+1} = \frac{1}{2}dx \\
&\text{on} \;\; \text{obtient} \quad y - 1 = \lambda\sqrt{|x|}
\end{aligned}$$

Équation homogène

On appelle équation différentielle homogène du 1^{er} ordre une équation de la forme $F(x, y, y') = 0$, dans laquelle le changement de x en λx et y en λy laisse y' invariant.
Interprétation géométrique
Soit (M, MT) un élément de contact. L'équation étant homogène, la tangente en $M'(\lambda x, \lambda y)$ est parallèle à (MT), c'est-à-dire que l'ensemble des courbes intégrales est globalement invariantes dans toutes homothétie de centre o, y' dépend donc de $\dfrac{y}{x}$.
On suppose que $y' = f(\dfrac{y}{x})$.



Méthode d'intégration :

On pose $\dfrac{y}{x} = t$ soit $y = tx$, on obtient $dy = tdx + xdt$, d'où $\dfrac{dy}{dx} = t + x\dfrac{dt}{dx} = f(t)$.

En séparant les variables, on obtient $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dt}{f(t) - t}$ pour $f(t) - t \neq 0$.

Alors $\ln \dfrac{x}{\lambda} = \displaystyle\int \dfrac{dt}{f(t) - t} = \varphi(t)$. On trouve une représentation paramétrique des courbes intégrales sous la forme

$$\begin{cases} x = \lambda e^{\varphi(t)} \\ y = \lambda t e^{\varphi(t)} \end{cases}$$

Exemple 5.1.9. Soit l'équation différentielle $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$,

On pose $\dfrac{y}{x} = t$, alors

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

$$y = xt \Rightarrow t + x\frac{dt}{dx} = \frac{t^2 - 1}{2t}$$

$$\text{d'où} \quad x\frac{dt}{dx} = -\frac{t^2 + 1}{2t} \quad \text{et} \quad -\frac{2tdt}{t^2 + 1} = \frac{dx}{x}$$

$$\text{ou} \quad \text{encore} \quad -\frac{d(t^2 + 1)}{t^2 + 1} = \frac{dx}{x}$$

Alors,

$$\begin{cases} x = \dfrac{\lambda}{t^2 + 1} \\ y = \dfrac{\lambda t}{t^2 + 1} \end{cases}$$

Équations linéaires

Définition 5.1.10. On appelle équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre une équation sous la forme

$$a(x)y' + b(x) = f(x) \tag{5.1.5}$$

dans laquelle les fonctions a, b, et f sont supposées continues sue un même sous-ensemble $I \subset \mathbb{R}$. a et b sont les coefficients de l'équation.
On appelle équation sans second membre associée l'équation

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{5.1.6}$$

Théorème fondamental

Théorème 5.1.11. *La solution générale de l'équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre (5.1.5) s'obtient en ajoutant à une solution particulière de l'équation complète (5.1.5) la solution générale de l'équation sans second membre associée (5.1.6).*

Intégration de l'équation (5.1.6).

L'équation $a(x)y' + b(x)y = 0$ est à variables séparables, on peut écrire :
$\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{b(x)}{a(x)}dx$ d'où $\ln \dfrac{y}{\lambda} = -\displaystyle\int \dfrac{b(x)}{a(x)}dx$,

c'est-à-dire $y(x) = \lambda y_1(x)$ avec $y_1(x) = e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}$.

Exemple 5.1.12. Soit l'équation différentielle linéaire $(1 + x^2)y' - xy = 1$.
Il est facile de vérifier que $y = x$ est une solution particulière de l'équation donnée.
Résolution de l'équation sans second membre, $(1 + x^2)y' - xy = 0$.
Nous avons $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xdx}{1 + x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d(1 + x^2)}{1 + x^2}\right)$, d'où $y = \lambda\sqrt{1 + x^2}$
La solution générale est $x + \lambda\sqrt{1 + x^2}$.

Méthode de la variation de la constante

Dans le cas où l'on ne connaît pas la solution particulière de l'équation différentielle linéaire on utilise la méthode de variation de la constante.
Soit $y = \lambda y_1(x)$ la solution générale de l'équation sans second membre, on se propose de chercher s'il existe des solutions de l'équation de la forme $y = \lambda(x)y_1(x)$, $\lambda(x)$ représente maintenant une fonction dérivable de la variable x, et on a

$$\begin{aligned}
&y' = \lambda'(x)y_1(x) + \lambda(x)y_1'(x)\\
&a(x)y' + b(x)y = a(x)\left[\lambda'(x)y_1(x) + \lambda(x)y_1'(x)\right] + b(x)\lambda(x)y_1(x) = f(x)\\
&\lambda(x)a(x)y_1'(x) + \lambda(x)\left[a(x)y_1'(x) + b(x)y_1(x)\right] = f(x)
\end{aligned}$$

Or $a(x)y_1'(x) + b(x)y_1(x) = 0$
puis donc $\lambda'(x) = \dfrac{f(x)}{a(x)y_1(x)}$
d'où $\lambda(x) = \varphi(x) + C$ avec $\varphi(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)}{a(x)y_1(x)}dx$.
C'est-à-dire $y = \varphi(x)y_1(x) + Cy_1(x)$.

Exemple 5.1.13. Intégrer l'équation : $y' \cos x + y \sin x = x$.
L'équation sans second membre : $y' \cos x + y \sin x = 0$ admet comme solution générale $y = \lambda \cos x$.
On pose $y(x) = \lambda(x) \cos x$, alors $y' = \lambda'(x) \cos x - \lambda(x) \sin x = x$
$[\lambda'(x) \cos x - \lambda(x) \sin x] \cos x + \lambda(x) \cos x \sin x = x$, donc $\lambda'(x) = \dfrac{x}{\cos^2 x}$d'où $\lambda(x) = \displaystyle\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$ après une intégration par partie on obtient $\lambda(x) = x \tan x - \displaystyle\int \tan x dx = x \tan x + \ln|\cos x| + C$.
Finalement $y = C \cos x + x \sin x + \cos x \ln|\cos x|$.

Équation se ramenant à une équation linéaire

1) Équation de Bernoulli :
On appelle équation de Bernoulli une équation différentielle du $1er$ ordre de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = f(x)y^\alpha$$

- Si $\alpha = 1$ l'équation est linéaire.
- Si $\alpha \neq 1$, en divisant les deux membres de l'équation par y^α, on obtient $a(x)y'y^{-\alpha} + b(x)y^{1-\alpha} = f(x)$.

On pose $z = y^{-\alpha}$, alors $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha)}y'$,
d'où l'équation linéaire $\dfrac{a(x)}{1-\alpha}z' + b(x)z = f(x)$.

Exemple 5.1.14.

$$y - xy' = 2xy^2 \tag{5.1.7}$$

En divisant par y^2 on obtient,$\dfrac{1}{y} - x\dfrac{y'}{y^2} = 2x$, on pose $z = \dfrac{1}{y}$ soit $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$, l'équation devient :

$$z + xz' = 2x \tag{5.1.8}$$

on remarque que $z = x$ est une solution particulière de (5.1.7), l'équation sans second membre donne $\dfrac{dz}{z} = -\dfrac{dx}{x}$, on obtient $z = \dfrac{\lambda}{x}$.
Alors $z = x + \dfrac{\lambda}{x}$ est la solution générale de (5.1.8), et par conséquent la solution générale de (5.1.7) est $\dfrac{1}{x + \frac{\lambda}{x}}$

2) Équation de Riccati :
On appelle équation de Riccati une équation différentielle du 1^{er} ordre de la forme

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

On ne peut intégrer cette équation que lorsqu'on connaît une solution particulière. Supposons que y_1 est une solution particulière, alors

$$\begin{aligned} y_1' &= a(x)y_1^2 + b(x)y_1 + c(x) \\ y' - y_1' &= a(x)\left[y^2 - y_1^2\right] + b(x)(y - y_1). \end{aligned}$$

En posant $y - y_1 = z$ on obtient

$$\begin{aligned} z' &= a(x)z(2y_1 + z) + b(x)z \\ z' &= a(x)z^2 + [2a(x) + y_1 + b(x)]\, z, \end{aligned}$$

on ait amené à une équation de Bernoulli.

Exemple 5.1.15. Intégrer $y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1$
On remarque que $y = x$ est une solution particulière, on pose $y = x + z$, alors $1 + z' = (x + z)^2 - 2x(x + z) + x^2 + 1$, on obtient $z' = z^2$.
On intègre cette équation, On écrit $\dfrac{z'}{z^2} = 1$ c'est-à-dire $\left(\dfrac{1}{z}\right)' = -1$ d'où $\dfrac{1}{z} = -x + \lambda$, finalement $y = x + \dfrac{1}{\lambda - x}$.

5.2 Équations différentielles du second ordre

5.2.1 Généralités

Définition et exemples

Définition 5.2.1. On appelle équation différentielle du $2e$ ordre toute relation de la forme :$F(x, y, y', y'') = 0$ entre la variable x, la fonction $y(x)$ et ses dérivées première et seconde. La fonctionφ, deux fois dérivable, est alors dite solution ou intégrale sur I sous-ensemble de $\mathbb{R}$ si $\forall x \in I,\ F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) = 0$

Exemple 5.2.2. L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$, admet pour solution sur $\mathbb{R}$, $\varphi_1(x) = \cos x$ et $\varphi_2(x) = \sin x$

Exemple 5.2.3. L'équation $y'' = 0$, admet pour solution sur $\mathbb{R}$, tout polynôme du 1^{er} degré $\varphi(x) = ax + b$ avec (a, b) arbitraires.

On admettra sans démonstration que, sous certaines hypothèses, une équation différentielle du 2^{er} ordre admet une infinité de solutions dépendant de deux constantes arbitraires λ_1 et λ_2 : $y = \varphi(x, \lambda_1, \lambda_2)$, l'ensemble de ces solutions constitue l'intégrale générale et représente l'équation d'une famille de courbes de deux paramètres C_{λ_1,λ_2} appelées courbes intégrales.

5.2.2 Équation se ramenant au premier ordre

1) Équation ne contenant pas y :
Soit une équation différentielle de 2e ordre $F'x, y, y', y'') = 0$. En posant $z = y'$ l'équation devient $F(x, z, z') = 0$

Exemple 5.2.4. soit l'équation $y'' + y'^2 = 0$, en posant $z = y'$ on obtient $z' + z^2 = 0$, alors $-\frac{dz}{z^2} = dx \Rightarrow \frac{1}{z} = x - x_0$ (x_0 constante), par conséquent $z = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x - x_0}$, d'où $dy = \frac{dx}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = \ln|x - x_0|$, la solution dépend de deux constantes x_0, y_0.

2) Équation ne contenant pas x :
Soit une équation différentielle de 2e ordre $F'x, y, y', y'') = 0$. Si l'on considère que y' comme fonction de y, en posant $y' = z(y)$ on obtient

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}.z$$

y joue donc le rôle de variable, et l'équation devient $F(y, z, z\frac{dz}{dy}) = 0$, c'est une équation du 1^{er} ordre pour z.
Soit $z = \varphi(y, \lambda_1)$ l'intégrale de cette équation, alors $z = \frac{dy}{dx} = \varphi(y, \lambda_1)$ ou encore $\frac{dy}{\varphi(y, \lambda_1)} = dx$, alors en intégrant : $x = f(y, \lambda_1) + \lambda_2$ avec $f(y, \lambda_1) = \int \frac{dx}{\varphi(y, \lambda_1)}$.

Exemple 5.2.5. Soit l'équation $y^2y'' + y' = 0$.
En posant $y' = z(y)$ soit $y'' = zz'$, l'équation devient $y^2zz' + z = 0$, en écartant la solution banale $z = 0$ (correspondante à $y = k$), nous avons $y^2z' + 1 = 0 \Rightarrow z' = \frac{1}{y} + \lambda_1$, on ait amené à l'équation du premier ordre $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} + \lambda_1$, alors

$$dx = \frac{dy}{\frac{1}{y} + \lambda_1} = \frac{ydy}{\lambda_1 y + 1} = \frac{1}{\lambda_1}(1 - \frac{1}{\lambda_1 y + 1})dy.$$

D'où $x = \frac{1}{\lambda_1}y - \frac{1}{\lambda_1^2}\ln|\lambda_1 y + 1| + \lambda_2$.

5.2.3 Équation différentielle linéaire du second ordre

Définition 5.2.6. On appelle équation différentielle linéaire du 2^e ordre une équation de la forme

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \tag{5.2.1}$$

a, b, c, f sont des fonctions sur $I \subset \mathbb{R}$.(a, b, c sont appelés coefficients de l'équation). On associe à cette équation l'équation dite sans second membre

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{5.2.2}$$

Théorème fondamental.
La solution générale de l'équation (5.2.1) s'obtient en ajoutant à une intégrale particulière de l'équation complète l'intégrale de l'équation sans second membre. Si y est la solution générale de (5.2.1) et y_0 est une solution particulière de (5.2.1), et Y est la solution générale de (5.2.6), alors $y = y_0 + Y$.

Intégration de l'équation sans second membre

a) Cas où l'on connait deux solutions particulières
Si y_1, y_2 sont deux solutions de (5.2.1, alors $y_1 + y_2$ et λy_1 avec ($\lambda \in \mathbb{R}$ sont des solutions de (5.2.6). y_1 et y_2 sont dits linéairement indépendants s'il n'existe pas deux constantes λ_1, λ_2 non nuls telles que : $\forall x \in I \qquad \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0$ ceci entraine $\lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x) = 0$
Alors le système

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0 \\ \lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x) = 0 \end{cases}$$

n'admet que $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$ comme solution. Donc le determinant

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

appelé Wronskien de y_1, y_2 n'est pas nul ; Au contraire si $w(x) = 0$ alors y_1 et y_2 sont linéairement dépendants.

Théorème 5.2.7. *La dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation* $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ *est égale à* 2.

Conséquence 5.2.8. Si y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation sans second membre, la solution générale s'écrit $Y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$, λ_1, λ_2 sont deux constantes arbitraires.

Exemple 5.2.9. $y'' + wy = 0$, $y_1 = \cos wx$ et $\sin wx$ sont deux solutions indépendantes car

$$w(x) = \begin{vmatrix} \cos wx & \sin wx \\ -w \sin wx & w \cos wx \end{vmatrix} = w \neq 0$$

$Y = \lambda_1 \cos wx + \lambda_2 \sin wx$.

Exemple 5.2.10. $y'' - wy = 0$, $y_1 = \cosh wx$ et $\sinh wx$ sont deux solutions indépendantes $Y = \lambda_1 \cosh wx + \lambda_2 \sinh wx$.

b) Cas où l'on connait qu'une solution particulière
Soit y_1 une solution de (5.2.6), on pose $y = y_1 z$ donc $y' = y_1' z + y_1 z'$ et $y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$
Soit $a(x)\left[y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''\right] + b(x)\left[y_1' z + y_1 z'\right] + c(x) yz = 0$ en tenant compte de $ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0$, alors on obtient $ay_1 z'' + (2ay_1' + by_1)z' = 0$, c'est une équation que l'on peut intégrer facilement.

Exemple 5.2.11. Soit l'équation $x^2 y'' + xy' - y = 0$, $y_1 = x$.
$y = xz \Rightarrow y' = z + xz' \Rightarrow y'' = 2z' + xz''$,
alors $x^2(2z' + xz'') + x(z + xz') - xz = 0$ d'où $xz'' + 3z' = 0$ ou $\dfrac{z''}{z'} = -\dfrac{3}{x}$, ce qui donne $z' = \dfrac{\lambda_1}{x^3}$, donc $z = -\dfrac{\lambda_1}{x^2} + \lambda_2$, on obtient $y = \dfrac{\lambda_1}{2}\dfrac{1}{x} + \lambda_2 x$ ou encore $y = C_1 \dfrac{1}{x} + C_2 x$.

Intégration de l'équation complète

a) Dans le cas où l'on connait une solution particulière $_0$ il suffit d'appliquer le théorème fondamental, $y = y_0 + Y$.

Exemple 5.2.12. Soit l'équation $x^2 y'' + xy' - y = x^3$, la solution de l'équation sans second membre est $Y = C_1 \dfrac{1}{x} + C_2 x$, on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de $3^{\text{ème}}$ degré $y_0 = ax^3$ donc $y_0' = 3ax^2$, et $y_0'' = 6ax$ ce qui donne $a = \dfrac{1}{8}$, donc la solution générale de l'équation donnée est $y = \dfrac{x^3}{8} + C_1 \dfrac{1}{x} + C_2 x$.

b) Si on ne connait pas de solution particulière on applique la méthode de variation de constantes.
Soient y_1, y_2 deux solutions indépendantes de (5.2.6) $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ la solution générale de l'équation sans second membre.
On pose $y = \lambda_1(x) y_1 + \lambda_2(x) y_2$ où λ_1, λ_2 sont des fonctions, alors $y' = \lambda_1'(x) y_1 + \lambda_2'(x) y_2 + \lambda_1(x) y_1'(x) + \lambda_2(x) y_2'(x)$, en imposant la condition $\lambda_1'(x) y_1 + \lambda_2'(x) y_2 = 0$ on obtient $y'' = \lambda_1'(x) y_1' + \lambda_2'(x) y_2' + \lambda_1(x) y_1'' + \lambda_2(x) y_2''$, soit en reportant dans (5.2.1) $a(\lambda_1'(x) y_1 + \lambda_2'(x) y_2 + \lambda_1(x) y_1'(x) + \lambda_2(x) y_2'(x)) + b(\lambda_1(x) y_1' + \lambda_2(x) y_2') + c(\lambda_1(x) y_1 + \lambda_2(x) y_2 = f(x)$, mais on a

$$\begin{cases} ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0 \\ ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0 \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} \lambda_1'(x) y_1(x) + \lambda_2'(x) y_2(x) = 0 \\ \lambda_1'(x) y_1'(x) + \lambda_2'(x) y_2'(x) = \dfrac{1}{a(x)} f(x) \end{cases}$$

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

car y_1, y_2 sont linéairement indépendants.

Exemple 5.2.13. Soit l'équation $y'' + y = \tan x$.
On a $y'' + y = 0 \Rightarrow y = \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x$.
Alors $y' = -\lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x$ si $\lambda_1' \cos x + \lambda_2' \sin x = 0$. Et $y'' = -\lambda_1' \sin x + \lambda_2' \cos x - \lambda_1 \cos x - \lambda_2 \sin x$.
En reportant dans l'équation on obtient :
$y'' + y' = -\lambda_1' \sin x + \lambda_2' \cos x = \tan x$,
on a le système

$$\begin{cases} \lambda_1' \cos x + \lambda_2' \sin x = 0 \\ -\lambda_1' \sin x + \lambda_2' \cos x = \tan x = 0 \end{cases}$$

d'où $\lambda_1' = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = \cos x - \dfrac{1}{\cos x}$, et $\lambda_2' = \sin x$
Alors,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \sin x - \ln|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})| + C_1 \\ \lambda_2 = \cos x + C_2. \end{cases}$$

La solution générale s'écrit : $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})|$.

5.2.4 Équation linéaire à coefficients constants

Définition 5.2.14. On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants une équation différentielle de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{5.2.3}$$

dans laquelle a, b, c sont des constantes.
On associe à (5.2.3) l'équation sans second membre

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{5.2.4}$$

Si y_0 est une solution de (5.2.4) et Y la solution générale de (5.2.4), alors $y = y_0 + Y$.

Intégration
On pose $y = e^{rx}$, alors $y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2 e^{rx}$, en reportant dans (5.2.4) on obtient $ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$ or $e^{rx} \neq 0$ donc on obtient

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{5.2.5}$$

Alors $y = e^{rx}$ soit solution de l'équation différentielle si et seulement si r est racine de (5.2.5).

Discussion

1) Si (5.2.5) admet deux racine différentes $r_1 \neq r_2$, alors $y_1 = e^{r_1 x}$ et $y_2 = e^{r_2 x}$ sont deux intégrales particulières de (5.2.4) linéairement indépendantes car $r_1 \neq r_2$, l'intégrale générale s'écrit $y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$.

2) Si $\vartriangle < 0$, r_1 et r_2 sont complexes conjugués, la solution générale s'écrit $y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$, on choisit $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ alors $y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \overline{\lambda_1} e^{\overline{r_1 x}} = 2Re(\lambda_1 e^{r_1 x})$.

Exemple 5.2.15. *a)* $y'' - 2y' - 3y = 0$, on a $r^2 - 2r - 3r = 0 \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = 3$, alors $y = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{3x}$

b) $y'' - 2y + 5y = 0$, on $r^2 - 2r + 5r = 0 \Rightarrow r_1 = 1 - 2i, r_2 = 1 + 2i$, d'où $y = e^x(\mu_1 \cos 2x + \mu_2 \sin 2x$.

3) Si (5.2.5) admet une racine double $r_1 = r_2 = \dfrac{-b}{2a}$, $y = e^{rx}$ est une solution particulière. On cherche la solution générale sous la forme $y = e^{rx} z$, où z est une fonction inconnue de x, nous avons $y' = e^{rx}(rz + z')$ et $y'' = e^{rx}(r^2 z + 2rz' + z'')$, en reportant dans l'équation on obtient : $e^{rx}\left[a(r^2 z + 2rz' + z'') + b(rz + z') + cz\right] = 0$, donc $e^{rx}\left[ar^2 + br + cz + (2ar + b)z' + az''\right] = 0$, alors $z'' = 0$, d'où $z = \lambda_1 x + \lambda_2$, la solution générale est donnée par $y = e^{rx}(\lambda_1 x + \lambda_2$.

Exemple 5.2.16. $y'' + 4y' + 4y = 0$, on a $r^2 + 4r + 4r = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -2$, alors $y = e^{-2x}(\lambda_1 x + \lambda_2$.

Intégration de l'équation complète

La solution de l'équation sans second membre étant supposée connue, on peut :

- Soit utiliser la méthode de variation de constantes .
- Soit chercher une solution particulière de degré n de (5.2.3).

1) $f(x) = P_n(x)$ où P_n est un polynôme de degré n. Il est naturel de chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme :

1) de degré n si $c \neq 0$.
2) de degré $n + 1$ si $c = 0$ et$b \neq 0$.
3) de degré $n + 2$ si $c = 0$ et $b = 0$.

Exemple 5.2.17. $y'' - 2y' - 3y = 3x^2 + 1$, on cherche la solution particulière sous la forme $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, alors $y' = 2\alpha x + \beta$ et $y'' = 2\alpha$, on trouve $\alpha = -1, \beta = \dfrac{4}{3}, \gamma = \dfrac{-17}{3}$, la solution générale est $y = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{3x} - x^2 + \dfrac{4}{3}x - \dfrac{17}{3}$.

2) $f(x) = e^{mx} P_n(x)$, avec $(m \in \mathbb{C}$, on cherche une intégrale particulière sous la forme $y = e^{mx} z(x)$, alors $y' = e^{mx}(mz + z')$, et $y'' = e^{mx}(m^2 z^2 + 2mz' + z'')$, soit après simplification par e^{mx}, $az'' + (2am + b)z' + (am^2 + bm + c)z = P_n(x)$.

On se trouve ramené au cas précédent, on prendra donc pour $z(x)$ un polynôme :
- de degré n si $(am^2 + bm + c \neq 0$ c'est-à-dire si m n'est pas racine de l'équation caractéristique.
- de degré $n+1$ si, $am^2 + bm + c = 0$ et $2am + b \neq 0$ (m racine simple).
- de degré $n+2$ si, $am^2 + bm + c = 0$ et $2am + b = 0$ (m racine double).

Exemple 5.2.18. $y'' - y' = 2xe^x$, ici $m = 1$, on a $m = 1$ est une racine simple de l'équation caractéristique $r^2 - 1$. On cherche une solution particulière sous la forme $y = e^x z(x)$ où $z(x)$ est un polynôme de degré 2, n ici égale à 1 puisque $P_n(x) = 2x$), c'est le cas $(n+1)$.
$z(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, donc $z' = 2\alpha x + \beta$ et $z'' = 2\alpha$, en reportant dans l'équation, et après calcul on trouve $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$, la solution particulière est $y = e^x(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2})$.
La solution générale est donc $y = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x} + \frac{e^x}{2}(x^2 - x)$.

Exercices

1. Classer les équations différentielles suivantes selon l'ordre et le degré :

a. $\mathrm{d}y + (xy - \cos x)\mathrm{d}x$

b. $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{Q}{C} = 0$

c. $y''' + xy'' + 2y(y')^2 + xy = 0$

d. $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + x\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2 + v = C$

e. $\left(\dfrac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}v^3}\right)2 - \left(\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}v^2}\right)4 + vw = 0$

f. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + 5$

g. $(y'')^2 + 2(y'')^2 + y' = \cos x$

2. Intégrer les équations différentielles suivantes :

1. a. $xy' + (1 + x)y = 0$
b. $\sin x\mathrm{d}y = y\mathrm{d}x$
c. $y'\sqrt{1 - x^2} + y^2 = 0$

2. a. $y' + y = x^2$
b. $xy' - y = \ln x$
c. $y' \cos x + y \sin x = 1 + x$

3. Intégrer les équations différentielles suivantes :

a. $xy'' = y'$

b. $y'' + yy' = 0$

c. $y'' - 4y = 0$

d. $y'' + y' - 2y = 0$

4. Intégrer l'équation différentielle

$$x^2y'' + xy' - y = 0 \text{ en posant } y = e^x$$

5. Intégrer par la méthode de variation des constantes l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$