Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Introduction à la Topologie

Licence Mathématiques-LMD-Semestre 3

Série 1: Topologie usuelle sur $\mathbb{R}$

Exercice 1: On considère dans $\mathbb{R}$ la famille suivante :
$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R} \ / \ (A = \emptyset)$ ou $(\forall x \in A, \ \exists I_x$ tel que $x \in I_x \subset A)\}$ où I_x est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1) Soit $A \in \mathcal{T}$ et $A \neq \emptyset$, montrer que $A = \bigcup\limits_{x \in A} I_x$.

2) Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$(la topologie usuelle de $\mathbb{R}$).

3) Montrer que $]a, b[, \ ]a, +\infty[, \ ]-\infty, b[$ sont des ensembles ouverts.

4) Montrer que $[a, b], \ [a, +\infty[, \ ]-\infty, b]$ sont des ensembles fermés.

5) Montrer que $]a, b], \ [a, b[$ sont des ensembles ni fermés ni ouverts.

6) Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est séparé.

Exercice 2: Démontrer que la réunion d'un nombre fini de fermés de $\mathbb{R}$ est un fermé.

Exercice 3: Démontrer que l'intersection de toute famille de fermés de $\mathbb{R}$ est un fermé.

Exercice 4: Trouver les points d'accumulation et les points isolés de chacun des ensembles de nombres réels suivants :

(1) $A_1 = \mathbb{N}$, **(2)** $A_2 =]a, b]$, **(3)** $A_3 = \complement_{\mathbb{R}} Q$,

(4) $A_4 =]-\infty, -1[\cup]-1, 3[\cup \{5, 8\}$, **(5)** $A_5 = \left\{ (-1)^n + \dfrac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Exercice 5: Trouver des ensembles A tels que :

(1) A et A' soient disjoints, **(2)** A soit un sous-ensemble propre de A',

(3) A' soit un sous-ensemble propre de A, **(4)** $A = A'$.

Exercice 6: Soit (x_n) une suite de Cauchy. Si une sous-suite (x_{n_k}) de (x_n) converge vers un point ℓ, alors la suite de Cauchy elle même converge vers ℓ.

Exercice 7: Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de A si et seulement si tout voisinage de x_0 contient une infinité de points de A.

Exercice 8: Une partie A de $(\mathbb{R}, |.|)$ est fermée si et seulement si elle contient tous ses points d'accumulation.

Exercice 9: Démontrer que si A est un ensemble fermé borné de nombres réels et si $sup(A) = k$, alors $k \in A$.