1) Introduction

Le problème du transport est un programme linéaire qui a une structure particulière. Cette classe de PLs englobe les problèmes qui s'énoncent dans une forme approximative à celle-ci : Il y a m origines et n destinations, dans chaque origine on dispose d'une certaine quantité de matières premières (ou produit donné), et dans chaque destination on demande une certaine quantité de ce produit.
Le coût de transport est différent pour chaque couple origine-destination. On cherche un plan de transport optimal dans le sens qu'il minimise le coût total de transport.

L'usage des tableaux de simplexe dans le cas des problèmes de transport est bien entendu possible. Toutefois, cette alternative ne présente pas un réel intérêt pratique car les problèmes de transport aboutissent généralement à un grand nombre de variables et de contraintes. Heureusement, une représentation intuitive et permettant un traitement facile des problèmes de transport existe : il s'agit du tableau de transport.

2) Représentation du problème de transport

Un problème de transport peut être représenté de trois manières :

- Sous la forme d'un tableau de transport
- Sous la forme d'un programme linéaire
- Sous la forme d'un graphe biparties

1) Formulation sous la forme d'un tableau de transport

Exemple

Soit une série de villes alimentées en électricité par des centrales. La situation est résumée par la table suivante :

	A	B	C	D	Puissance fournie (GWh)
1	6	5	3	1	**500**
2	10	8	4	2	**300**
3	7	9	11	12	**200**
Demande (GWh)	**300**	**300**	**300**	**100**	

Figure 1. : Un tableau de transport.

La structure d'un tableau de transport est assez intuitive comme le montre l'exemple de la Figure 1.

Dans ce problème, on a trois origines et quatre destinations. Les offres des origines sont inscrites sur la dernière colonne, et les quantités disponibles dans les différentes destinations sont inscrites sur la dernière ligne. Les chiffres inscrits en petite taille dans chaque case indiquent les coûts de transport unitaires entre chaque origine et chaque destination. Par exemple, chaque unité transportée de l'origine 2 vers la destination 3 induit un coût de transport de 4(um). Remarquons que dans ce tableau l'offre totale est égale à la demande totale. On dit que ce problème est *équilibré*. Si le problème n'est pas équilibré, on est dans le cadre d'un cas particulier qu'on discutera à la fin de ce cours.

2) Formulation mathématique sous la forme d'un programme linéaire

1)*Définition* des variables

$x_{ij} = \text{ nombre de GWh produits à la centrale } i \text{ et envoyé à la cité } j$

Description de la fonction économique

$$
\begin{aligned}
MinZ = \; & 6x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 1x_{14} \\
+ \; & 10x_{21} + 8x_{22} + 4x_{23} + 2x_{24} \\
+ \; & 7x_{31} + 9x_{32} + 11x_{33} + 12x_{34}
\end{aligned}
$$

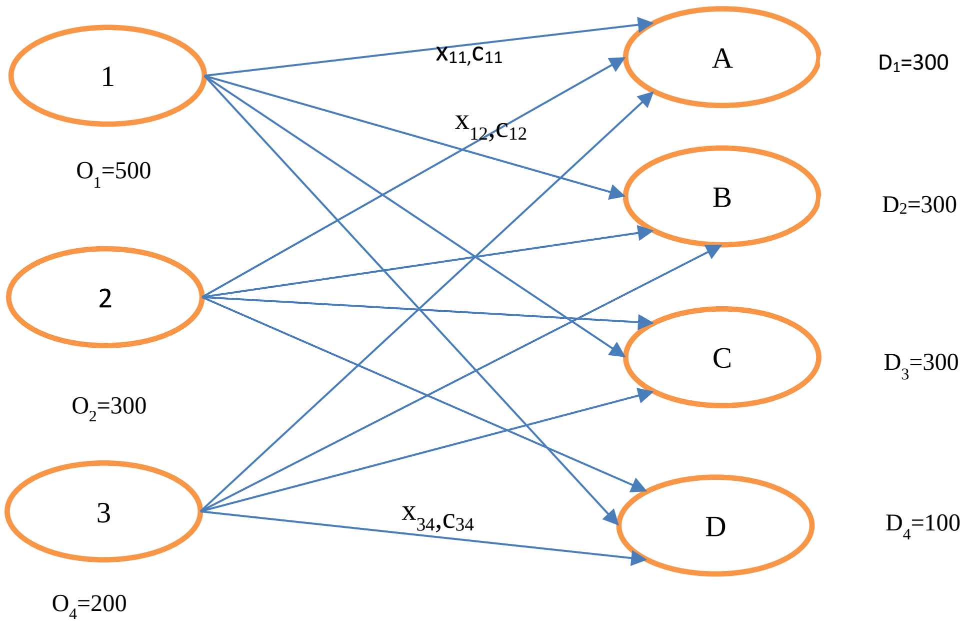
3)*Les Contraintes*

Contraintes de production $\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 500 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 300 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 200 \end{cases}$

Contraintes de consommation $\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 300 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 300 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 300 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 100 \end{cases}$

Plus les contraintes non négativité ($x_{ij} \geq 0$)

3) Formulation sous la forme de graphe bipartie



3. Résolution du Problème de transport

Comme dans la méthode du simplexe la résolution se déroule en deux parties :

1. Recherche d'une solution de base réalisable
2. Optimisation de la solution

1) Solution initiale

Une solution de base pour un problème de transport avec m origines et n destinations doit contenir exactement : (m+n-1) variables de base.
Dans l'exemple proposé ci-haut on doit donc avoir dans tous les tableaux correspondants six variables de base.

Il y a plusieurs méthodes qui permettent d'obtenir une solution initiale. Nous présentons les deux méthodes les plus fréquemment utilisées.

a) La méthode du coin Nord-Ouest

Partir du coin supérieur gauche du tableau.

1. Allouer le plus possible à la cellule courante et ajuster l'offre et la demande ;
2. Se déplacer d'une cellule vers la droite (demande nulle) ou le bas (offre nulle) ;
3. Répéter jusqu'au moment où toute l'offre est allouée et toute la demande est satisfaite.

	A	B	C	D	Offre
1	$\boxed{300}$ 6	$\boxed{200}$ 5	3	1	**500**
2	10	$\boxed{100}$ 8	$\boxed{200}$ 4	2	**300**
3	7	9	$\boxed{100}$ 11	$\boxed{100}$ 12	**200**
Demande	**300**	**300**	**300**	**100**	

Figure 2. : Solution initiale

Le coût total correspondant à cette solution est de 6700(um).

L'avantage principal de la méthode du coin nord-ouest est la facilité de mise en œuvre. L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle ne tient pas compte de la structure de coût. Généralement, mais pas systématiquement, elle aboutit à un coût total initial assez élevé.

b) La méthode du moindre coût

L'idée consiste à exploiter les cases ayant des coûts de transport faibles et leur attribuer les quantités maximales (dans la mesure du possible). On procède de la manière suivante :

1. Repérer la case du tableau ayant le coût le plus faible ;
2. Affecter à cette case la quantité maximale possible ; une colonne ou une ligne est saturée :
3. Si une colonne est saturée, l'éliminer du tableau, mettre à jour la quantité dans la ligne correspondante et reprendre au point 1 avec le nouveau tableau ;
4. Si une ligne est saturée, l'éliminer du tableau, mettre à jour la quantité dans la colonne correspondante et reprendre au point 1 avec le nouveau tableau ;

Lorsque toutes les lignes et toutes les colonnes sont saturées, le tableau doit contenir exactement **(m+n-1)** variables de base.

L'application à l'exemple proposé plus haut nous donne le tableau représenté dans la Figure 3.

	A	**B**	**C**	**D**	**Offre**
1	6	$\boxed{100}$ 5	$\boxed{300}$ 3	$\boxed{100}$ 1	**500**
2	$\boxed{100}$ 10	$\boxed{200}$ 8	4	2	**300**
3	$\boxed{200}$ 7	9	11	12	**200**
Demande	**300**	**300**	**300**	**100**	

Figure 3. : Solution initiale

Le coût total correspondant à cette solution initiale est de 5500(um).

En effet, de manière générale, la méthode du moindre coût aboutit à une meilleure solution initiale que la méthode du coin nord-ouest

4. Recherche de la solution optimale

Afin de trouver le tableau optimal, on procède comme dans le simplexe classique. La première étape consiste à calculer les coûts marginaux pour les variables **hors-base**.

Il s'agit des δ_{ij} comme indiqué dans la Figure 4.

	A	B	C	D	Offre
1	δ_{11} 6	$\boxed{100}$ 5	$\boxed{300}$ 3	$\boxed{100}$ 1	**500**
2	$\boxed{100}$ 10	$\boxed{200}$ 8	δ_{23} 4	δ_{23} 2	**300**
3	$\boxed{200}$ 7	δ_{32} 9	δ_{33} 11	δ_{34} 12	**200**
Demande	**300**	**300**	**300**	**100**	

Figure 4. : Les coûts marginaux.

Ce calcul se fait en trois étapes :

1. Pour chaque variable de base écrire l'équation : $c_{ij} = u_i + v_j$
2. Résoudre le système obtenu en fixant : $u_i = 0$
3. Calculer les valeurs des coûts marginaux à partir du système : $\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$

$$u_1 = 0 \qquad \delta_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 6 - 0 - 7 = -1$$

$$u_1 + v_2 = 5 \Rightarrow v_2 = 5$$

$$u_1 + v_3 = 3 \Rightarrow v_3 = 3 \qquad \delta_{23} = 4 - 3 - 3 = -2$$

$$u_1 + v_4 = 1 \Rightarrow v_4 = 4 \qquad \delta_{24} = 2 - 3 - 1 = -2$$

$$u_2 + v_2 = 8 \Rightarrow u_2 = 3 \qquad \delta_{32} = 9 - 0 - 5 = +4$$

$$u_2 + v_1 = 10 \Rightarrow v_1 = 7 \qquad \delta_{33} = 11 - 0 - 3 = +8$$

$$v_1 + u_3 = 7 \Rightarrow u_3 = 0 \qquad \delta_{34} = 12 - 0 - 1 = +11$$

Il est pratique d'effectuer ce calcul directement sur le tableau de transport.

	A	B	C	D	Offre	u_i
1	-1 6	$\boxed{100}$ 5	$\boxed{300}$ 3	$\boxed{100}$ 1	**500**	0
2	$\boxed{100}$ 10	$\boxed{200}$ 8	-2 4	-2 2	**300**	3
3	$\boxed{200}$ 7	+4 9	+8 11	+11 12	**200**	0
Demande	**300**	**300**	**300**	**100**		
v_j	7	5	3	1		

Figure 5.

Coût =100*5+300*3+100*1+100*10+200*8+200*7=5500 um

Ce tableau contient des coûts marginaux strictement négatifs, et donc il ne s'agit pas d'une solution optimale.

- Si elle est optimale on s'arrête, sinon on refait une autre itération, et ainsi de suite.
- Ici, on peut prendre la variable x_{23} comme variable entrante.
- La valeur de x_{23} doit être augmentée mais tout en respectant les contraintes d'offre et de demande, ainsi que la non-négativité des autres variables.

Sur le tableau de la figure 6., le cycle --- indique les variations à effectuer pour sauvegarder une solution de base réalisable.

	A	B	C	D	Offre	u_i
1	-1 6	100 + 5	300 - 3	100 1	**500**	0
2	100 10	200 - 8	-2 + 4	-2 2	**300**	3
3	200 7	+4 9	+8 11	+11 12	**200**	0
Demande	**300**	**300**	**300**	**100**		
v_j	7	5	3	1		

Figure 6.

– Un signe ``+'' indique une augmentation de la quantité et un signe ``-'' indique une diminution de la quantité.

– En valeur absolue, la variation est la même pour toutes les cases sur le cycle.

– Dans notre cas :

- x_{23} augmente de 200 unités,
- x_{22} diminue de 200 unités,
- x_{12} augmente de 200 unités
- et enfin x_{13} diminue de 200 unités

On obtient ainsi le tableau donné par la figure 7., et pour lequel on refait le même travail, afin d'obtenir la solution optimale donnée par le tableau 8.

	A	B	C	D	Offre	u_i
1	-3 + 6	300 5	100 - 3	100 1	500	0
2	100 - 10	+2 8	200 + 4	0 2	300	1
3	200 7	+6 9	+10 11	+12 12	200	-2
Demande	300	300	300	100		
v_j	9	5	3	1		

Figure 7. : Le deuxième tableau de transport

Coût =5200 um

	A	B	C	D	Offre	u_i
1	$\boxed{100}$ 6	$\boxed{300}$ 5	3	$\boxed{100}$ 1	500	0
2	+3 10	+2 8	$\boxed{300}$ 4	0 2	300	1
3	$\boxed{200}$ 7	+3 9	+7 11	+10 12	200	1
Demande	300	300	300	100		
v_j	6	5	3	1		

Figure 8. : Le troisième tableau (optimal) Coût=4800 um

4. Cas particuliers

Offre supérieure à la demande.

Afin de retrouver un problème de transport correctement structuré, on ajoute une demande fictive avec des coûts unitaires nuls, et dont la demande correspond à l'excédent de l'offre. Après cette transformation, un tableau de transport peut être construit et la résolution se fait de manière classique.

Offre inférieure à la demande.

Dans ce cas le problème n'admet pas de solution réalisable, et donc pas de solution optimale.

5. Dégénérescence.

La Dégénérescence peut apparaître, soit au niveau de la recherche de la solution initiale, soit au cours des itérations pour la recherche de la solution optimale. Solution initiale : A chaque fois qu'on ajoute une quantité, soit une ligne soit une colonne est saturée. Il se peut toutefois que, simultanément, une ligne et une colonne soient saturées. Dans ce cas on obtiendra moins de variables de base. Afin de compléter la base, on ajoute une variable de base avec une quantité nulle.