Divers cas peuvent se produire lors de la résolution d'un modèle de programmation linéaire, examinons ces divers cas.

1. Infinité de solution

Énoncé :

Si à l'optimum, une variable hors base x_j a un coefficient $Z_j - C_j$ dont la valeur est zéro, la solution optimale n'est pas unique et il existe une infinité de solutions pour un tel modèle de programmation linéaire.

Explication :

Supposons qu'à l'optimum, la variable x_j est une variable hors base. Si le coefficient $Z_j - C_j$ =0, ceci implique qu'on peut rendre x_j variable de base sans changer la valeur de la fonction économique. D'où il existe deux ensembles de variables de base, l'un contenant la variable et l'autre ne la contenant pas, dont les solutions de base correspondantes sont solutions optimales.

Si deux solutions de base sont optimales, ceci veut dire qu'il existe deux points extrêmes qui optimisent la fonction économique. Ceci implique que tout point situé sur le segment de droite, reliant ces deux points extrêmes, est aussi point optimal.

Donc un modèle de programmation linéaire admettant deux solutions optimales admet, en réalité, une infinité de solutions optimales, dont deux sont solutions de base optimales

Exemple :

$$MaxZ = 2.5x_1 + x_2$$

$$tel\ que \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau final

C*	X*	2.5	1	0	0	
		X_1	X_2	X_3	X_4	b
0	X_3	0	19/5	1	-3/5	9
2.5	X_1	1	2/5	0	1/5	2
Z_j		2.5	1	0	0.5	5
Z_j-C_j		0	0	0	0.5	

$$\left.\begin{array}{l} Z_2 - C_2 = 0 \\ \text{et } x_2 \text{ variable hors base} \end{array}\right\} \rightarrow \text{le problème admet une infinité de solution}$$

En rendant x_2 variable de base nous obtenons un autre tableau final

C*	X*	2.5	1	0	0	
		X_1	X_2	X_3	X_4	b
1	X_2	0	1	5/19	-3/5	45/19
2.5	X_1	1	0	-5/19	5/19	20/19
Z_j		2.5	1	0	9.5/19	5
Z_j-C_j		0	0	0	9.5/19	

Nous obtenons avec la méthode du simplexe les deux solutions

$a)$ *Tableau final*$_1$

$x_1 = 2$

$x_2 = 0$

$x_3 = 9$

$x_4 = 0$

$MaxZ = 5$

b)*Tableau final*$_2$

$x_1 = \frac{20}{19}$

$x_2 = \frac{45}{19}$

$x_3 = 0$

$x_4 = 0$

$\mathrm{MaxZ} = 5$

Tout point satisfaisant la relation :

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} \frac{20}{19} \\ \frac{45}{19} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad avec \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \text{ et } \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0$$

Est aussi une solution optimale. Une telle combinaison est appelée « combinaison convexe ».

Exemple

si l'on pose $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ nous obtenons la solution suivante:

$x_1 = \frac{29}{19}$

$x_2 = \frac{45}{38}$ qui est aussi une solution optimale

$x_3 = \frac{9}{2}$

$x_4 = 0$

$MaxZ = 5$

2. Aucune solution au modèle

Énoncé :

Si la solution de base contient une variable artificielle positive, il n'existe pas de solution au modèle de la programmation linéaire.

Explication :

Le modèle transformé à l'aide de variables artificielles est équivalent au modèle original à condition que les variables artificielles aient une valeur nulle à l'optimum.

Si, dans la solution de base optimale, une variable artificielle est positive, alors il n'existe aucune solution au système d'équations ou il existe une solution contenant des variables négatives, ce qui revient au même en programmation linéaire.

Exemple :

$$MaxZ = 3x_1 - 2x_2$$

$$tel\ que \begin{cases} x_1 + x_2 \ \leq \ 1 \\ 2x_1 + 2x_2 \ \geq \ 4 \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Le\ programme\ transformé\ est\ : MaxZ = 3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5$$

$$Tel\ que \begin{cases} x_1 + x_2 \ + x_4 = \ 1 \\ 2x_1 + 2x_2 \ - x_3 + x_5 = \ 4 \\ x_j \geq 0, \ \ j = 1,5 \end{cases}$$

Après calcul nous obtenons le tableau final suivant :

	C_j	3	-2	0	0	-M	
C*	X*	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b_i
3	X_1	1	1	0	1	0	1
-M	X_5	0	0	-1	-2	1	2
Z_j		3	3	M	2M+3	-M	3-2M
Z_j-C_j		0	5	M	2M+3	0	

Tous les coefficients $Z_j - C_j$ étant positifs ou nuls la solution est optimale, mais cette solution contient une variable artificielle (x_5) positive, donc ce programme n'admet pas de solution.

3. Solution infinie

Énoncé :

Si quel que soit le tableau du simplexe, il existe un coefficient $Z_j - C_j$ négatif et que tous les coefficients de la colonne j sont non positifs, il existe une solution contenant un nombre de variables positives supérieur au nombre de contraintes et rendant la valeur de la fonction économique Z infinie

Explication : Supposons un programme à **n+m** variables et **m** contraintes.

Définissons par $x_{1^*}, \quad x_{2^*}, \quad \ldots \quad , x_{m^*}$ les variables de base et par $x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad , x_n$ les variables hors base. Supposons que x_{i^*} est variable de base à la l[ième] équation.

Exprimons la variable de base x_{i^*}, en fonction des variables hors base, nous obtenons :

$$x_{i^*} = bi - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

Supposons que $Z_j - C_j < 0$. Ceci indique qu'on a avantage à rendre positive la variable x_j .

Supposons de plus que dans chaque contrainte le coefficient de x_j est négatif, c'est-à-dire : $a_{ij} \leq 0 \qquad \forall i = 1, m$ (toute la colonne est non positive)

Donnons à la variable x_j la valeur $\theta > 0$. On obtient la solution suivante :

$$x_j = \theta$$
$$x_k = 0 \quad pour \quad k \neq j \quad et \quad k = 1, n$$
$$x_{i^*} = b_i - \theta a_{ij} \quad pour \quad i = 1, n$$

Notons que $\forall i = 1, m$, la variable x_{i^*} sera toujours positive puisque $a_{ij} \leq 0 \qquad \forall i = 1, m$.

De même, la variable x_j est positive. On obtient donc une solution contenant m+1 variables positives.

Pour connaître la valeur à donner à θ, examinons l'expression de Z pour cette solution $Z = Z_0 - (Z_j - C_j)\theta$

Puisque $Z_j - C_j$ est négatif, nous pouvons donner à θ la plus grande valeur possible, ainsi en posant $\theta = +\infty$ on obtient $Z = +\infty$

Exemple

$$MaxZ = x_1 + 3x_2$$

$$tel\ que \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Programme transformé

$$MaxZ = x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$tel\ que \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_j \geq 0,\ pour\ \ j = 1,4 \end{cases}$$

Tableau du simplexe (1ier tableau)

C*	X*	1	3	0	0	
		X_1	X_2	X_3	X_4	b
0	X_3	-1	2	1	0	16
0	X_4	0	1	0	1	2
Z_j		0	0	0	0	0
Z_j-C_j		-1	-3	0	0	

Puisque $Z_1 - C_1 < 0$ et qu'il n'existe pour la variable x_1 aucun coefficient positif, la solution optimale est : $Z = +\infty$. Il suffit de donner à x_1 *la valeur* $+\infty$.

En effet, de ce tableau nous tirons les expressions :

$$x_3 = 16 + x_1 - 2x_2$$

$$x_4 = 2 - x_2$$

$$Z = 0 + x_1 + x_2$$

on voit alors qu'on posant $x_1 = +\infty$, le système de contraintes est respecté et que $Z = +\infty$.

4. Variables négatives

La méthode du simplexe est utilisée avec l'hypothèse que toutes les variables soient non négatives. Il arrive cependant qu'un modèle accepte des variables négatives, ce qui ne correspond en général à aucune réalité économique.

$$MaxZ = x_1 + x_2$$

Exemple : $$tel\ que \begin{cases} 2x_1 + x_2 \ \le \ 1 \\ x_1 \ge \ 0 \\ -3 \le x_2 \le 2 \end{cases}$$ avant d'utiliser la méthode du simplexe, il faut transformer la variable x_2 ainsi : $x_2 = x_2' - x_2''$ et le modèle transformé équivalent est :

$$MaxZ = x_1 + x_2' - x_2''$$

$$tel\ que \begin{cases} 2x_1 + x_2' - x_2'' \ \le \ 1 \\ x_2' - x_2'' \le 2 \\ -x_2' + x_2'' \le 3 \\ x_1 \ge \ 0 \ , x_2' \ge 0, x_2'' \ge 0 \end{cases}$$

Ce modèle satisfait toutes les exigences de la méthode du simplexe.

5. La dégénérescence

Nous avons dit précédemment qu'il existe une correspondance biunivoque entre une solution de base et un point extrême. La correspondance entre un point extrême et une solution de base dégénérée n'est pas biunivoque. En effet, à un point extrême peut correspondre plus d'une solution de base dégénérée. L'inconvénient d'une telle situation est que l'on passe d'une solution de base dégénérée à une autre sans augmenter la valeur de fonction économique, puisqu'on reste au même point extrême. Il peut arriver que l'on fasse indéfiniment la même boucle, c'est-à-dire que l'on revienne après une ou plusieurs itérations à la solution de base dégénérée initiale. Il faut avouer qu'on réalité ce phénomène est très rare et qu'il ne s'est jamais produit en pratique, les exemples de bouclage on été fabriqués de toutes pièces.