1. Introduction

Le modèle de la programmation linéaire tel que décrit peut difficilement être résolu à cause de la présence de contraintes sous forme d'inéquations.
Dans ce cours nous transformerons le modèle de manière à ce que toutes les contraintes soient sous forme d'équations. Cette transformation nous permettra d'avoir une première solution non forcement optimale du problème.

2. Définitions

Les variables principales et non principales définies précédemment peuvent êtres positives, négatives ou nulles, or en programmation linéaire, les variables ne peuvent êtres que positives ou nulles, d'où la nécessité d'utiliser les définitions suivantes.

1) **Variable de base** : Une variable de base est une variable principale **positive ou nulle**.
2) **Variable hors base** : Une variable hors base est une variable non principale **nulle.**
3) **Solution de base** : Soit un programme linéaire à n variables et m contraintes sous forme d'équations. Toute solution à ce système de contraintes, composées de m variables de base positives et (n-m) variables hors base est dite « solution de base »
4) **Solution de base dégénérée :** Une solution de base est dite dégénérée si son nombre de variables positives est inférieur au nombre de contraintes, c'est-à-dire si au moins une des variables de base est nulle. Cette solution engendre beaucoup de difficultés dans le processus de recherche de la solution optimale.

3. Théorème fondamental de la programmation linéaire

Nous avons vu, lors de la résolution géométrique d'un programme linéaire, que la solution optimale, si elle existe :

- Si elle est unique, elle se trouve nécessairement en un point extrême.
- Si elle n'est pas unique, au moins l'une des solutions optimales (deux en réalité) est un point extrême.

Donc le théorème suivant établie la correspondance entre un point extrême et une solution de base :

Une solution de base est un point extrême. $\Longleftrightarrow$ Un point extrême est une solution de base.

Ce théorème nous permet de chercher les solutions de base au lieu de chercher les points extrêmes et parmi les solutions de base nous savons qu'une sera optimale.

Pour trouver les solutions de base et la solution de base optimale il faut transformer les inéquations en équations.

4. Transformation en équation d'une inéquation

Il est pratiquement impossible de trouver une solution à un programme linéaire à plus de trois variables avec la méthode graphique, il faut donc utiliser une méthode algébrique.
Pour résoudre le système de contraintes, il faut qu'il soit sous forme d'équations.
Lorsque le système est sous forme d'inéquations, il suffit d'utiliser quelques transformations élémentaires nous permettant de transformer les inéquations en équations.
L'essentiel est que la solution du programme transformé est équivalente à la solution du programme original.

Soit le programme linéaire, sous forme générale :

$$MaxZ = c_1x_1 + c_2x_2$$
$$tel\ que \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2 \end{cases}$$

Programme original

1) Transformation en équation d'une inéquation de signe inférieur ou égal (≤)

En ajoutant au premier membre de cette inéquation une variable positive ou nulle, appelée variable d'écart, et dénotée ici x_3, nous obtenons un programme équivalent :

$$MaxZ_1 = c_1x_1 + c_2x_2$$
$$tel\ que \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 3 \end{cases}$$

Programme transformé

Vérifions que la solution optimale sera équivalente pour les deux programmes (Programme original et Programme transformé).

1. Les fonctions économiques Z et Z_1 sont identiques, donc leurs valeurs optimales seront aussi identiques
2. Dans le programme transformé, la variable d'écart (X_3) peut être positive ou nulle :
   - Si elle est positive, ceci implique que la contrainte associée à cette variable d'écart sera satisfaite comme une inéquation stricte (X3 >0, implique qu'en réalité $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 < b_1$, au départ)
   - Si elle est nulle, elle sera satisfaite comme une équation stricte. (X3=0, implique qu'en réalité $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ au départ)

2) Transformation en équation d'une inéquation de signe supérieur ou égal (≥)

En retranchant au premier membre de cette inéquation une variable positive ou nulle, appelée variable d'excédent, et dénotée ici X_4, nous obtenons un programme équivalent :

$$MaxZ_2 = c_1x_1 + c_2x_2$$
$$tel\ que \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - x_4 = b_3 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 4 \end{cases}$$

Vérification : Le même raisonnement, qui a été appliqué à la variable d'écart, s'applique à la variable d'excédent à savoir :

- Si elle est positive, ceci implique que la contrainte associée à cette variable d'excédent sera satisfaite comme une inéquation stricte (X4 >0, implique qu'en réalité $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 > b_3$, au départ)
- Si elle est nulle, elle sera satisfaite comme une équation stricte (X4=0, implique qu'en réalité $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3$, au départ)

3) Résumé

L'utilisation des variables d'écart et d'excédent permet de transformer des inéquations en équations et la solution optimale du programme transformé est équivalente à celle du programme original.

$$MaxZ = c_1x_1 + c_2x_2$$
$$tel\ que \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2 \end{cases}$$

Programme original

$$MaxZ_t = c_1x_1 + c_2x_2$$
$$tel\ que \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - x_4 = b_3 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 4 \end{cases}$$

X_3 est une variable d'écart

X_4 est variable d'excédent

Programme transformé

Pour trouver la solution du programme original, il suffit de trouver la solution du programme transformé.

4) Convention

Comme les **b_i** peuvent être de signes quelconques, nous choisirons la convention suivante :

Dans la méthode de résolution d'un programme linéaire, on s'assure que les seconds membres (b_i) soient toujours non négatifs

Si un second membre (b_i) d'une contrainte est négatif, il suffit de multiplier par -1 cette contrainte et de modifier en conséquence le sens de l'inéquation.

Exemple :

Soit le système : $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -8 \\ -x_1 + 4x_2 = -10 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq -2 \end{cases}$ Le système équivalent respectant la convention : $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 - 4x_2 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 \geq 2 \end{cases}$

5. Création d'une première solution de base

Pour trouver la solution optimale, il suffit de passer d'une solution de base à une autre en s'assurant, à chaque fois, qu'un tel passage améliore la fonction économique au sens du maximum. Il nous faut donc une première solution de base. Pour se faire il y a deux possibilités :

1) Soit chercher une solution de base (cela peut être long et fastidieux)
2) Ou créer une solution de base (assez simple).

Nous allons donc en créer une en utilisons **les variables artificielles**.
Posséder une solution de base, c'est posséder un système d'équations dans lequel une variable est isolée et avec un coefficient +1 dans chaque équation.

a) Pour les contraintes de **type inférieur ou égal (≤), la variable d'écart joue le rôle de variable de base.**

b) Pour les contraintes de **type supérieur ou égal (≥), il ajouter une variable artificielle qui sera la variable de base pour cette contrainte.**

c) Pour les contraintes de **type égal (=), il ajouter une variable artificielle qui sera la variable de base pour cette contrainte.**

Ainsi donc le système de contraintes original :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2 \end{cases}$$

Sera transformé en un système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_5 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - x_4 + x_6 = b_3 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 6 \end{cases}$$

Ce système a l'avantage de fournir immédiatement une première solution de base :

Variables hors base : $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ variables de base : $\begin{cases} x_4 = b_1 \\ x_5 = b_2 \\ x_6 = b_3 \end{cases}$

x_1 et x_2 sont les variables du programme

x_3 est une variable d'écart

x_4 est une variable d'excédent

x_5 et x_6 sont des variables artificielles

- Il faut obligatoirement qu'à l'optimum les variables artificielles soient nulles, sinon les contraintes originales ne seraient pas respectées. En effet, si la solution optimale est telle que $X_5 > 0$, ceci implique que les valeurs des variables originales sont telles que $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 < b_2$. Ce qui ne vérifie pas la contrainte originale $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$.

- Pour s'assurer que la solution de base optimale ne contienne aucune variable artificielle positive, il suffit, de donner à chaque variable artificielle le coefficient **(-M) où M est une valeur très grande (théoriquement M = ∞)**, dans la fonction économique. Cet artifice oblige les variables artificielles à devenir variables hors base. On dit que l'on désavantage les variables artificielles.

- Si à l'optimum une variable artificielle est toujours positive on dit que le programme n'admet pas de solution.

6. En résumé

Soit le programme linéaire :

$$MaxZ = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$tel\ que \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2 \end{cases}$$

La solution optimale de ce programme est équivalente à la solution du programme transformé :

$$MaxZ_t = c_1x_1 + c_2x_2 - Mx_5 - Mx_6$$

$$tel\ que : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_5 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - x_4 + x_6 = b_3 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 6 \end{cases}$$

Où

x_1 et x_2 sont les variables du programme
x_3 est une variable d'écart
x_4 est une variable d'excédent
x_5 et x_6 sont des variables artificielles

Ce programme a une solution de base immédiate :

Variables de base : $\begin{cases} x_4 = b_1 \\ x_5 = b_2 \\ x_6 = b_3 \end{cases}$ Variables hors base : $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

7. Exemple

Soit le programme linéaire :

$$MaxZ = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$tel\ que : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 7 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \leq -4 \\ X_j \geq 0 \quad j = 1, 3 \end{cases}$$

Vérifier qu'un programme équivalent est le programme linéaire suivant :

$$MaxZ_t = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - Mx_6 - Mx_7$$

$$tel\ que : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 7 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_6 = 10 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_5 + x_7 = 4 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 7 \end{cases}$$