1. Position du problème

Considérons le système linéaire suivant de *n* équations à *n* inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = b_i \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nj}x_j + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ce système s'écrit sous la forme : $Ax = b$

$$si\ x = (x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n),\ b = (b_1, b_2, ..., b_j, ..., b_n)\ et\ A = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}...a_{1j}...a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}...a_{2j}...a_{2n} \\ .... \\ a_{i1}\ a_{i2}...a_{ij}..a_{in} \\ .... \\ a_{n1}\ a_{n2}...a_{nj}...a_{n} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

i représente le numéro de ligne et j le numéro de colonne.

2. Définitions

1) Une matrice est dite **triangulaire** si $a_{ij} = 0$ pour j>i ou pour i>j.
2) Une matrice **bande** est une matrice dont tous les éléments sont nuls sauf sur une bande autour de la diagonale principale.
3) Solution : Nous appelons « **ensemble des solutions (S)** d'un système d'équations linéaires », l'ensemble des points satisfaisant à ce système d'équations linéaires.
4) Variables principales et variables non principales : Dans un système d'équations linéaires, si des variables sont **explicitement exprimées en fonction des autres**, les premières sont dites **principales** et les autres, **non principales.**

Exemple :

Soit le système d'équations linéaires : $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

Si on choisit x_1 et x_2, comme variables principales et x_3 comme variable non principale, dans ce cas le système s'écrit : $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 - 3x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 = 2 - x_3 \end{cases}$

3. Résolution

La résolution du système précédent peut s'effectuer par deux méthodes :
- la méthode directe (dite méthode du pivot),
- la méthode itérative.

La méthode du pivot est commode pour les systèmes denses d'ordre supérieur, ainsi que pour les matrices bandes même d'ordre élevé.

La méthode itérative est mieux adaptée aux autres matrices d'ordre élevé et comportant de nombreux éléments nuls.

4. Méthode du pivot (Méthode de GAUSS-JORDAN)

1) Description de la méthode

C'est la méthode la plus utilisée. Pour la présenter, nous allons prendre l'exemple d'un système de 4 équations à 4 inconnues :

$$\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_{21}\ a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_{31}\ a_{i2} a_{33} a_{34} \\ a_{41}\ a_{42} a_{43} a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

La **méthode classique de Cramer** qui repose sur les déterminants, donne :
$x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$ où Δ est le déterminant de la matrice, et Δ_j celui déduit de Δ en y remplaçant la $j^{ème}$ colonne par la colonne second membre.
Pour résoudre le système, cette méthode nécessite $\mathbf{n^4}$ opérations si **n** est le rang de la matrice.

Dans la **méthode du pivot**, on choisit successivement chaque ligne comme ligne pivot ; le pivot étant le 1er élément non nul de la ligne.

Ainsi, on divise la ligne n° 1 du système par a_{11} : $\begin{bmatrix} 1\ a'_{12} a'_{13} a'_{14} \\ a_{21}\ a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_{31}\ a_{i2} a_{33} a_{34} \\ a_{41}\ a_{42} a_{43} a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$

On annule le 1er terme de chacun des autres lignes : à la 2ème ligne, on retranche la 1ère multipliée par a_{21}, à la 3ème ligne, on retranche la 1ère multipliée par a_{31}, à la 4ème ligne, on retranche la 1ère multipliée par a_{41}.

Le système devient : $\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{i2} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{bmatrix}$

La 2ème ligne est considérée maintenant comme une ligne pivot, et a'_{22} comme un élément pivot. On répète sur cette 2ème ligne les opérations précédentes, et on obtient après division de cette ligne par a'_{22} :

$$\begin{vmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & 1 & a''_{23} & a''_{24} \\ 0 & a'_{i2} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b'_1 \\ b''_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{vmatrix}$$

On annule les autres termes de la seconde colonne ; c'est à dire : à la 1ère ligne, on retranche la seconde multipliée par a'_{12}, à la 3ème ligne, on retranche la 2ème multipliée par a'_{32}, à la 4ème ligne, on retranche la 2ème multipliée par a'_{42}.

On obtient : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a''_{13} & a''_{14} \\ 0 & 1 & a''_{23} & a''_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & a''_{43} & a''_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b''_1 \\ b''_2 \\ b''_3 \\ b''_4 \end{vmatrix}$

On considère ensuite la 3ème ligne comme pivot, puis la 4ème ligne ; ce qui donne :

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^{(4)}{}_1 \\ b^{(4)}{}_2 \\ b^{(4)}{}_3 \\ b^{(4)}{}_4 \end{bmatrix}$ soit la solution du système : $\begin{cases} x_1 = b^{(4)}{}_1 \\ x_2 = b^{(4)}{}_2 \\ x_3 = b^{(4)}{}_3 \\ x_4 = b^{(4)}{}_4 \end{cases}$

D'une manière générale, si on applique cette procédure au système $Ax = b$ où A est une matrice d'ordre n,

- On remarque qu'à l'issue de la 1ère étape, on obtient la matrice A_1 comportant des 0 et un 1 dans sa 1ère colonne,
- À l'issue de la 2ème étape, on a une matrice A_2 comportant des 0 et des 1 dans ses 2 premières colonnes, etc.
- À l'issue de la kième étape, on obtient un système de la forme : $A^{(k)}.x = b^{(k)} avec\ A^{(k)} = \left[a_{ij}^{(k)} \right]\ et\ b^{(k)} =\ matrice\ colonne\ d'éléments\, b_i^{(k)}$
- Pour les *k* premiers éléments diagonaux, on a : $a_{ij}^{(k)} = 1 \quad si \quad i = j \leq k$
- Pour les colonnes 1 à k éléments non diagonaux, on a : $a_{ij}^{(k)} = 0\ si \quad i \neq j\ et\ j \leq k\ ;\ b_i^{(k)}$ étant les composantes du vecteur $b^{(k)}$.

L'étape suivante consiste à prendre $a_{k+1,k+1}^{(k)}$ comme élément pivot.
On divise la *(k+1) ième* ligne par cet élément, ce qui donne pour *j=k+1* à *n* :

$$a'_{ij} = a_{ij}^{(k)} \quad et\ b'_{k+1} = b_i^{(k)} \quad si \quad i \neq k+1$$

$$a'_{k+1,j} = \frac{a^{(k)}{}_{k+1,j}}{a^{(k)}{}_{k+1,k+1}} \qquad et \qquad b'_{k+1} = \frac{b^{(k)}{}_{k+1}}{a^{(k)}{}_{k+1,k+1}}$$

Pour chaque ligne $i \neq k+1$, la ligne *k+1* multipliée par $a_{i,k+1}^{(k)}$ est retranchée.

On obtient alors le système :

$$A^{(k+1)}.x = b^{(k+1)}\ avec\ : \begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik+1}^{(k)}.a'_{k+1j} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - a_{ik+1}^{(k)}.b'_{k+1} \end{cases} \qquad i \neq k+1$$

2) **Résumé de la procédure :**
   a) Transformation de la matrice [A,b] en une matrice [I,b'] :

I : matrice identité
$A^{(0)} = A$ et $a_{i,n+1}^{(0)} = b_i^{(0)}$

Pour *k* variant de *0* à *n-1*, on a :

$$\left.\begin{array}{l} i = k+1 \\ j = k+1,\dots, j = n+1 \end{array}\right\} \Rightarrow a_{k+1,j}^{(k+1)} = \frac{a_{k+1,j}^{(k)}}{a_{k+1,k+1}^{(k)}}$$

$$\left.\begin{array}{l} i = 1,\dots, i = n \\ i \neq k+1 \\ j = k+1,\dots, j = n+1 \end{array}\right\} \Rightarrow a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - a_{i,k+1}^{(k)}.a_{(k+1,j}^{(k+1)}$$

   b) **La solution x_i du système résultant s'écrit alors :**

$x_i = a_{i,n+1}^{(n)}$; Avec $i = 1, 2, \dots, n$

Le nombre d'opérations nécessaires au passage de *[A ,y]*$^{(k)}$ à *[A, y]*$^{(k+1)}$ est :

- *n. additions (= n.a) = (n-1).(n-k+1)*
- *n. multiplications (= n.m) = (n-1).(n-k+1)*
- *n. divisions (= n.d) = (n-k+1)*

  Le passage de *[A ,b]* à *[A, b]*$^{(n)}$ nécessite environ $n^3/2$ opérations de calculs.

La méthode ainsi exposée, présente un certain nombre de défauts :

- Lenteur compte tenu du nombre d'opérations si le rang *n* de la matrice *A* est grand,
- Difficulté si le pivot est nul puisque la division n'est plus possible (dans ce cas, il faut permuter les colonnes tout en veillant à la cohérence des calculs qui suivent),
- Précision si le pivot est faible (<<1), les erreurs d'arrondi deviennent très importantes et affectent toute la suite des calculs.

3) **Exemple**

Soit le système à résoudre : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$

On forme tout d'abord la matrice *[A, y]* :

K=1 k=1

Normalisation $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}$ Réduction $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & 11 \end{pmatrix}$

K=2 k=2

Normalisation $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -6 & 3 & 11 \end{pmatrix}$ Réduction $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

K=3 k=3

Normalisation $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{pmatrix}$ Réduction $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{pmatrix}$

La solution est $x_i = a_{i,n+1}$; d'où : $x^* = (7/2 \quad -5/2 \quad 4/3)$