RESOLUTION GEOMETRIQUE DU MODELE DE LA P L

1. Introduction

La résolution géométrique du modèle de la programmation linéaire est donnée ici à titre purement pédagogique, en effet elle n'offre d'intérêt que si le nombre de variable du problème ne dépasse pas deux variables.

2. Solution graphique

Exemple : l'entreprise 'PRODO' utilise trois machines, dénotées A, B et C, pour fabriquer deux produits, dénotés P_1 et P_2. Chaque unité de P_1 requiert respectivement 1 heure de la machine A et 2 heures de la machine B. Chaque unité de P_2 requiert 1 heure de chacune des trois machines. Les disponibilités mensuelles des machines AB et C sont de 400,600 et 300 heures.
Si le profit unitaire est de 1.50 da et 1 da pour les produits P_1 et P_2, combien d'unités de chacun de ces produits, l'entreprise devra-t-elle produire mensuellement pour maximiser ses profits ?

- Représentation algébrique du problème :

1) Définition des variables

Soient x_1 : le nombre d'unités du produit P_1 à produire mensuellement
x_2 : le nombre d'unités du produit P2 à produire mensuellement

2) Description de la fonction objective

L'objectif du problème consiste à trouver les valeurs non négatives x_1 et x_2 qui maximisent la fonction économique $Z=1.5\,x_1+x_2$
Et qui satisfont aux contraintes :

3) Description des contraintes

$-$ *Disponibilité de machine A* : $x_1 + x_2 \le 400 \quad (a)$

$-$ *Disponibilité de machine B* : $2x_1 + x_2 \le 600 \quad (b)$

$-$ *Disponibilité de machine C* : $x_2 \le 300 \quad (c)$

4) Le programme linéaire

$$MaxZ = 1.5\, x_1 + x_2$$

$$\text{Tel que : } \begin{cases} x_1 + x_2 \le 400 \\ 2x_1 + x_2 \le 600 \\ \quad x_2 \le 300 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- Représentation graphique du problème :

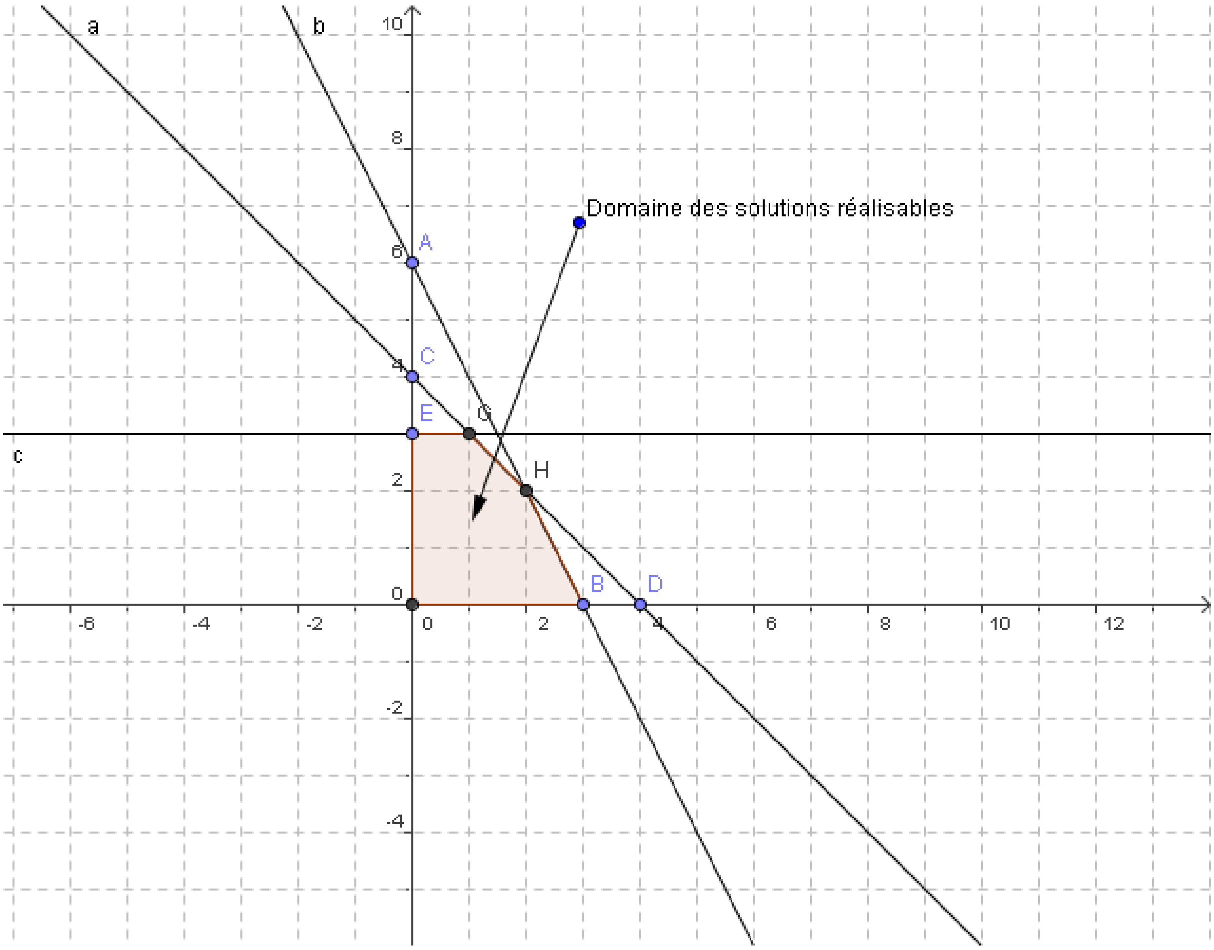

Figure 1.

Les points représentés par les couples (x_1, x_2) satisfaisant à l'ensemble des contraintes sont ceux appartenant au domaine des solutions réalisables sur le graphe.

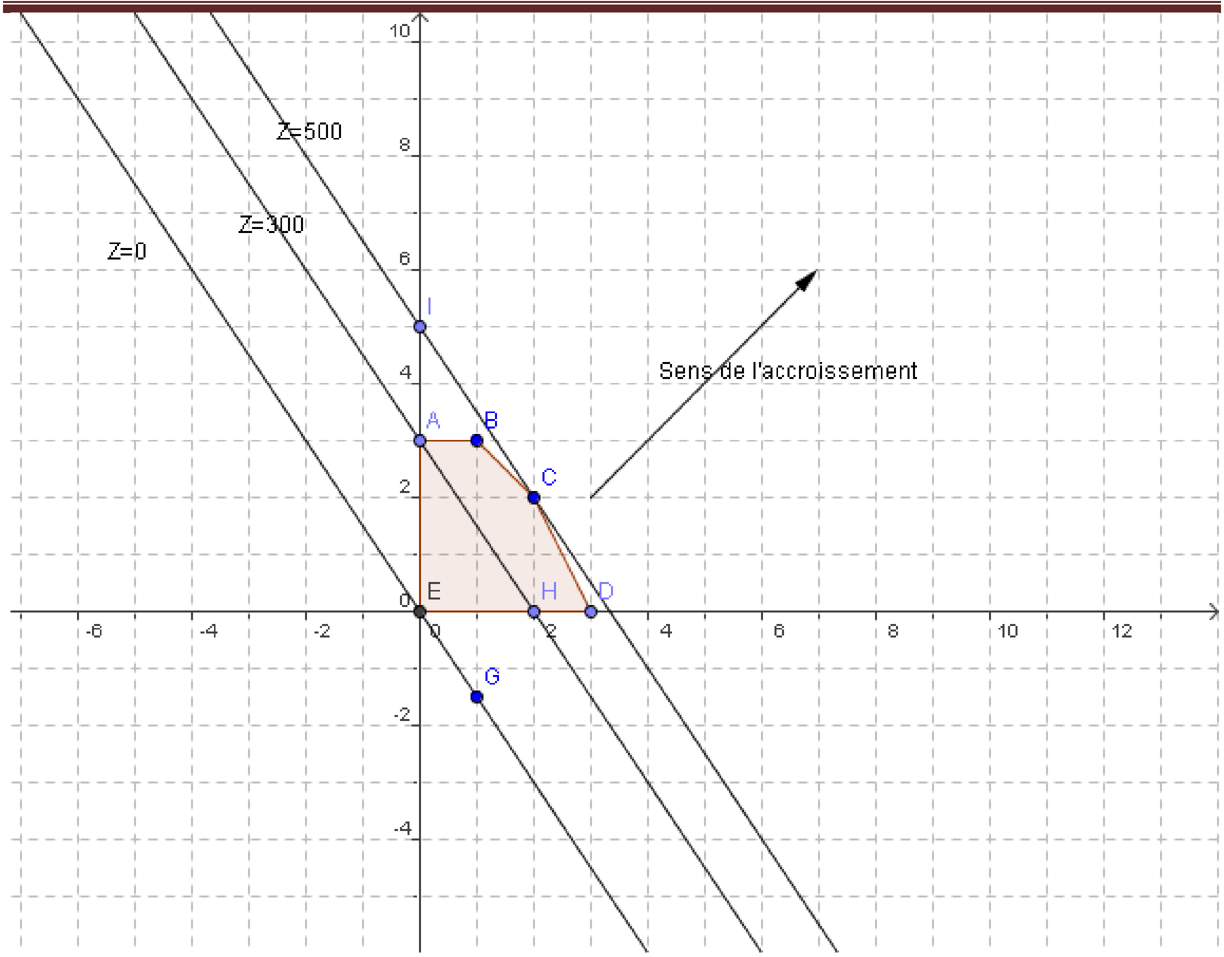

Figure 2.

- Après avoir décrit graphiquement le domaine (D), cherchons la solution au programme linéaire.
- Pour cela traçons la droite Z=1.5 x_1+ x_2. Pour se faire, il suffit de choisir certaines valeurs pour Z. Exemple Z=0, Z=300, Z=500.
- Remarquons que quelle que soit la valeur donnée à Z, toutes les droites : Z=1.5 x_1+ x_2 sont parallèles puisqu'elles ont toutes la même pente (-1.5).

- Donc pour trouver graphiquement la solution optimale, il suffit donc de tracer la droite Z=0 et de la déplacer par translation dans le sens de l'accroissement pour obtenir Z=300, Z=400, …, Z=500.

- Question : Que sera le point maximal ?
- Réponse : s'il est unique, ce sera le dernier point touché du domaine.

Pour notre exemple, le point maximal est point (C) (200,200) à ce point la valeur de la fonction économique est : Z=500.

- Cas d'un minimum : Pour minimiser, il suffit de donner à la fonction économique Z une valeur suffisamment grande par rapport à ces coefficients et de pousser en faisant une translation dans le sens de la diminution le dernier point touché correspond au minimum.

- Démonstration intuitive que si la solution optimale, si elle existe et si elle est unique et finie, se trouve toujours en un point extrême.

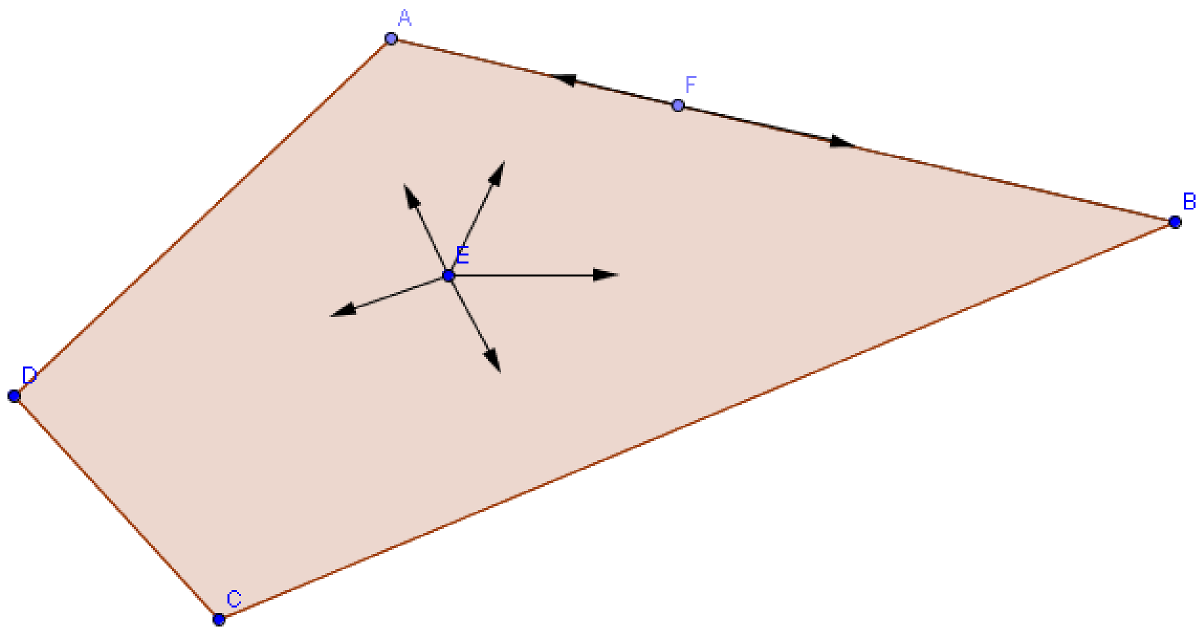

Figure 3.

Vous vous etes sans doute apeçu que la solution optimale se trouvait en un point extême du domaine. Ceci n'est pas du hazard.

Démonstration :

Soit un domaine (figure 3.) possédant quatre points extêmes **A, B, C** et **D**.

1) Question : Le points intérieur **(E)** maximise-t-il une fonction économique linéaire **Z** ?

- Réponse : Sûrement pas, puisque de ce point, on peut se déplacer dans toutes les directions en restant à l'intérieur du domaine.
- Comme la fonction est linéaire, il existe donc un autre point, différent du point **E** qui donne à la fonction économique une valeur supérieure. Ainsi nous sommes assurés que la solution optimale se trouve en un point situé sur la frontière du domaine.

2) Question : Le point **F** situé sur la frontière du domaine maximise-t-il une fonction économique **Z** ?

- Réponse : Supposons que la valeur de la fonction économique **Z** est plus petite au point **B** qu'au point F. En prenant la direction B $\rightarrow$ F, on augmente la valeur de cette fonction économique. Il est évident qu'en suivant la même direction, F $\longrightarrow$ A, nous continuerons à accroître la valeur de cette fonction. Ainsi le point F ne peut être un maximum !

- La solution optimale se trouve nécessairement en un point extrême.

Si la solution optimale est unique et finie, elle est située à un point extrême du domaine.

Le cas de non-unicité de la solution se produit lorsque la fonction économique Z est parallèle à l’une des contraintes du problème.
Le cas d’une solution infinie arrive si le domaine n’est pas fermé.