Université Ferhat Abbas
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année Universitaire 20015/2016
LMD Science de la Matière
$1^{ère}$ Année Semestre1

Série de TD n°1
Théorie des ensembles, relations

Exercice 1

Soit A, B, et C trois parties d'un ensemble quelconque E. Prouver que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ et } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (*)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ et } (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (*)$$

Exercice 2

Soit E un ensemble. A et B étant deux parties quelconques de E.
1. Prouver que les équivalences suivantes sont vraies

$$\begin{aligned} A &\subset B \Longleftrightarrow C_E^B \subset C_E^A \\ A \cap B &= \varnothing \Longleftrightarrow A \subset C_E^B \text{ et } A \cup B = E \Longleftrightarrow C_E^A \subset B \quad (*) \end{aligned}$$

- Clarifier ces résultats avec des shemas.
2. Prouver que les égalités suivantes sont vraies

$$C_E^{C_E^A} = A, \; C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B \text{ et } C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B \quad (*)$$

Exercice 3

1. Soit l'ensemble $A = \{a, b, c, d\}$. Déterminer $P(E)$.
2. L'ensemble $P(\phi)$ est-il vide ?
3. Si E est un ensemble à k éléments, combien $P(E)$ a-t-il d'éléments ?

Exercice 4

1. Soit A, B, et C trois parties d'un ensemble quelconque E.
- Prouver que

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C) \text{ et } (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) \quad (*)$$

- Vérifier avec : $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 5\}$ et $C = \{2, 10\}$.
2. Soit les parties de $\mathbb{R}$ suivantes : $I = [0, 3]$, $J = [0, 4]$, $K = [1, 4]$ et $L = [1, 5]$.
- Dessiner, dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$ les ensembles : $I \times J$ et $K \times L$.
- Déterminer : $(I \times J) \cap (K \times L)$.

Exercice 5
Soit f une application de E dans $\mathbb{R}_+$ définie par : $f(x) = x^2$
1/ Si $E = \mathbb{R}$, f est il surjective, injective, bijective ?
2/ Si $E = \mathbb{R}_+$(ou $\mathbb{R}_-$), prouver que f est bijective. Trouver f^{-1}.

Exercice 6
Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G. Prouver que

$$\begin{aligned} g \circ f \text{ injective} &\implies f \text{ injective,} \\ g \circ f \text{ surjective} &\implies g \text{ surjective,} \\ f \text{ injective et } g \text{ injective} &\implies g \circ f \text{ injective,} \\ f \text{ surjective et } g \text{ surjective} &\implies g \circ f \text{ surjective.} \end{aligned}$$

Exercuce 7
Soit f une application de E dans F.
1. A_1, A_2 étant deux parties de E. Prouver que

$$A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

$$f \text{ injective} \Longrightarrow f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1 \cap A_2) \text{ et } f^{-1}(f(A_1)) = A_1$$

2. B_1, B_2 étant deux parties de F. Prouver que

$$B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2),$$

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \text{ et } f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \quad (*)$$

$$f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right) = C_E^{f^{-1}(B_1)}$$

$$f \text{ surjective} \Longrightarrow f\left(f^{-1}(B_1)\right) = B_1$$

Les exercices ou les questions mentionnés par $(*)$ seront laissés aux étudiants.

Université Ferhat Abbas
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année Universitaire 20015/2016
LMD Science de la Matière
$1^{ère}$ Année   Maths1

Série de TD n°2

Intervalles, valeur absolue et raisonnement par récurrence

Exercice 1

Représenter graphiquement les ensembles suivants sur la droite réelle et les écrire à l'aide d'intervalles.

(1) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 3 \text{ et } x > -3\}$
(2) $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 5 \text{ ou } x \leq 2\}$
(3) $C = \{x \in \mathbb{R} : 4 \leq x \leq 8 \text{ et } x \neq 6\}$
(4) $D = \{x \in \mathbb{R} : x < 3 \text{ ou } x = 3\}$
(5) $E = \{x \in \mathbb{R} : 3 < x \leq 7 \text{ ou } x > 10\}$
(6) $F = \{x \in \mathbb{R} : x > 4 \text{ et } x < 2\}$

Exercice 2

Soient I_1, I_2 et I_3 trois parties de $\mathbb{R}$ données par :

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3, 3 + \frac{1}{n^2}\right[, I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right[\text{ et } I_3 = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, n\right]$$

Montrer que : $I_1 = 3$, $I_2 = [0, 2]$ **et** $I_3 =]1, +\infty[$

Exercice 3

1. Démontrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq |x| + |y| \text{ et } ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

2. Démontrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \text{ et } \min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

Exercice 4

On définit les cinq ensembles suivants :

$\mathbf{A}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1\}$
$\mathbf{A}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > -1\}$
$\mathbf{A}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$
$\mathbf{A}_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| < 1\}$
$\mathbf{A}_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| < 1\}$

1. Représenter ces cinq ensembles.
2. En déduire une démonstration géométrique de

$$(|x + y| < 1 \text{ et } |x - y| < 1) \Longleftrightarrow |x| + |y| < 1$$

Exercice 5

Montrer par récurrence que :

1. $\forall n \in \mathbb{N} : 10^n - (-1)^n$ **est un multiple de** 11.
2. $\forall n \in \mathbb{N} - \{3\} : 2^n \geq n^2$.
3. $\forall n \in \mathbb{N} : 1 + x + x^2 + ... + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$**, pour tout** $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Université Ferhat Abbas-Sétif1
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année Universitaire 20015/2016
LMD Science de la Matière
$1^{ère}$ Année Maths 1

Série de TD n°3

Limites, continuité, dérivabilité, triginométrie réciproque et hyperbolique

Exercice 1

Soit f une fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}$$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux extrémités de D_f.

Exercice 2

Etudier les limites suivantes :

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}, \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}, \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}} \quad (*), \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}} \quad (*)$$

Exercice 3

1. Peut-on prolonger par continuité en 0 la fonction f dans chacun des cas suivant :

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x},\ f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

2. Soit g une fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-|x|}{x^2+|x|}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$$

Pour quelle valeur de α, la fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4

Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est-elle continue en 0?

Exercice 5

1. Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f(x)=\begin{cases}\sin x.\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},\quad f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}\quad (*)$$

2. Déterminer $a,b\in\mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leq x\leq 1\\ ax^2+bx+1, & x>1\end{cases}$$

soit dérivable sur $[0,+\infty[$.

Exercice 6

Trouver D le domaine de dérivabilité de que f et calculer f' sur D dans chacun des cas suivants :

$$f(x)=\sqrt{6-x-x^2},\ f(x)=\ln\left(3\sqrt{x}-2\right),\ f(x)=\exp\left(\tan\frac{x}{2}\right)\ \ (*),\ f(x)=\frac{2\sin x-1}{3\cos x+1},\ (*)$$

Exercice 7

Résoudre les équations suivantes :

$$\cos(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{ et }\ \sin(\arccos x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ et }\ \arcsin 2x-\arcsin\sqrt{3}x=\arcsin x\ \ (*)$$

Exercice 8

Déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée pour chacune des fonctions suivantes :

$$f(x)=\arcsin\sqrt{x^2+1},\ g(x)=\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\ \text{ et }\ h(x)=\arctan\sqrt{1-x^2}$$

Exercice 9

Soit a et b deux réels positifs tels que $a^2-b^2=1$. Résoudre le système

$$\begin{aligned} chx+chy &= 2a\\ shx+shy &= 2b\end{aligned}$$

NB. Chers collègues, veuillez SVP terminer cette série avant le 4 décembre 2015.

Université Ferhat Abbas (Sétif1) Année Universitaire 20015/2016
Faculté des Sciences LMD Science de la Matière
Département de Physique $1^{ère}$ Année Semestre1

Série de TD n°4

Groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels et application linéaire

Exercice 1
Soit $*$ la loi interne définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x * y = x + y + x^2y^2$$

a) Vérifier que $*$ est commutative.
b) La loi $*$ est-elle associative ?
c) Montrer que $\mathbb{R}$ admet un neutre pour $*$ et calculer ce neutre.
d) Résoudre les deux équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$1 * x = 0 \text{ et } 1 * x = 1$$

Exercice 2 $(*)$
On munit de la loi de composition interne définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

1. Montrer que l'application f définie par $f(x) = x^3$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, *)$ vers $(\mathbb{R}, +)$.
2. Déduire que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe commutatif.

Exercice 3
Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans G définie par

$$(x,y) * (x',y') = (xx', xy' + y)$$

1. Montrer que $(G, *)$ est un groupe. Est-il commutatif ?
2. Montrer que $(]0, +\infty[\times \mathbb{R}, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

Exercice 4
Soient $A = \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ et $B = \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$
Montrer que A et B sont respectivement sous anneau et sous corps du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Exercice 5
Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:
$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 5y = 0\}$
$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = 0\}$
$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \text{ et } z = 0\}$
$E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Exercice 6
On considère dans $\mathbb{R}^3$ les trois sous-espaces vectoriels F, G, H définis respectivement par :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = 0 \text{ et } y = z\} \\ G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y = 0\} \\ H &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\} \ (*) \end{aligned}$$

Donner leur dimension.

Exercice 7
On considère f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z) = (x+y, x-z, y-z)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (c.à.d. f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui même).
4. Déterminer $\ker f$ (le noyau de f) et $\operatorname{Im} f$ (l'image de f).

Exercice 8 $(*)$
Soient $B_2 = \{e_1, e_2\}$ et $B_3 = \{j_1, j_2, j_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.
1. Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui vérifie :

$$f(e_1) = 2j_2 + j_3 \text{ et } f(e_2) = -j_1 + j_2$$

2. Déterminer $\dim \operatorname{Im} f$. Déduire $\dim \ker f$.

NB. Les exercices mentionnés par $(*)$ seront laissés aux étudiants.

Université Ferhat Abbas (Sétif1)
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année Universitaire 2015/2016
LMD Science de la Matière
$1^{ère}$ Année Semestre2

Série de TD n°5

Théorèmes des accroissements finis, de Rolle, formule de Taylor et développements limités.

Exercice 1

Soit P la fonction polynômiale définie par

$$P(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$$

Montrer que P' s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$.

Exercice 2

En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que :

1. $\forall x \geq 0 : \dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$,
2. $\forall x \in \mathbb{R} : e^x \geq 1 + x$,
3. $\forall x \geq 0 :$ $\arctan x \geq \dfrac{x}{1+x^2}$.

Exercice 3

Soient p et q deux réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que la fonction polynômiale P définie par

$$P(x) = x^n + px + q$$

admet au plus trois racines réelles si n est impair et au plus deux racines réelles si n est pair.

Exercice 4

A partir des développements limités des fonctions : $x \longrightarrow \sin x$, $x \longrightarrow \cos x$, $x \longrightarrow \exp x$, $x \longrightarrow \dfrac{1}{1-x}$ en 0 et $x \longrightarrow \ln x$ en 1, donner le DL en 0 de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \exp x . \cos x$ à l'odre 3,
2. $f(x) = \dfrac{\sin x - x}{x^3}$ à l'odre 6,
3. $f(x) = \ln(\cos x)$ à l'odre 6,
4. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \exp x}$ à l'odre 6.

Exercice 5

En utilisant le DL au voisinage en 0 et 1, calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}, \ \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} \text{ et } \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\cos(x-1) - \sqrt{x}}{x-1}$$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$

1. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ et la position de la tangente par rapport à la courbe de f.
3. Déterminer une équation de l'asymptote en $+\infty$ ainsi que la position de cette asymptote par rapport à la courbe de f.

Exercice 3
Soient p et q deux réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que la fonction polynômiale P définie par

$$P(x) = x^n + px + q$$

admet au plus trois racines réelles si n est impair et au plus deux racines réelles si n est pair.
Solution de l'exo3 :
Par l'absurde on suppose qu'il y a (au moins) quatre racines distinctes pour $P(x) = x^n + px + q$. Notons les $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Par le théorème de Rolle appliqué trois fois (entre x_1 et x_2, entre x_2 et x_3, entre x_3 et x_4) il existe x'_1, x'_2 et x'_3 des racines de $P'(x)$. On applique deux fois le théorème Rolle entre x'_1 et x'_2 et entre x'_2 et x'_3. On obtient deux racines distinctes pour $P''(x)$. Or $P''(x) = n\,(n-1)\,x$ ne peut avoir que 0 comme racines. Donc nous avons obtenu une contradiction.

Université Ferhat Abbas (Sétif1)
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année Universitaire 20015/2016
LMD Science de la Matière
$1^{ère}$ Année Maths2

Série de TD n°6

Primitives et intégrales simples

Exercice 1

1. En utilisant un changement de variable du type $u = \varphi(x)$ pour F_1 et F_2 et du type $x = \phi(t)$ pour G_1 et G_2, calculer les primitives suivantes

$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}},\ F_2(x) = \int (2\cos x + 3)^3 \sin x dx,\ G_1(x) = \int \frac{dx}{x(x^2+3)} \text{ et } G_2(x) = \int x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$$

2. Déduire les intégrales définies suivantes :

$$I_1 = \int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}},\ I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2\cos x + 3)^3 \sin x dx,\ J_1 = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x(x^2+3)} \text{ et } J_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$$

Exercice 2

1. En utilisant l'intégration par parties, calculer les primitives suivantes :

$$\int x^3 \ln x dx,\ \int x^2 \arctan x dx,\ \int e^{ax} \sin bx dx \text{ et } \int_0^1 e^{ax}\cos(bx)\,dx,\ (a, b \in \mathbb{R})$$

2. Déduire les intégrales définies suivantes : $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} \sin x dx$ et $I_2 = \int_0^{\pi} e^{3x} \cos 2x dx$

Exercice 3

Calculer les primitives des fonctions rationnelles suivantes; en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs

$$f(x) = \frac{x^2}{(x+2)(x^2-1)},\ g(x) = \frac{x-1}{x^3-2x^2+x},\ h(x) = \frac{x^4+4}{x^3(x^2+1)}$$

Exercice 4

Calculer les intégrales définies suivantes

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^3 x dx,\ I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos 3x dx,\ I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos 4x dx$$

Exercice 5

Calculer les intégrales définies suivants

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx,\ J_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}dx,\ J_3 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan x}dx$$

Exercice 6

Calculer les primitives des fonctions suivantes; en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+2}},\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}},\ h(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}},\ k(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

Université Ferhat Abbas (Sétif1)
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année Universitaire 20015/2016
LMD Science de la Matière
$1^{ère}$ Année Maths2

Série de TD n°7

Equations différentielles d'ordre 1 et 2

Exercice 1
Déterminer pour les équations différentielles suivantes leur ordre, la fonction inconnue et la variable indépendante

$$\theta\dot{x} - x = 1 - \theta,\ y'' - 5xy = e^x + 1,\ t\ddot{y} + t\dot{y} = t^2,\ s^2\frac{d^2t}{ds^2} + st\frac{dt}{ds} = s,\ y\frac{d^2x}{dy^2} = y^2$$

Exercice 2
Vérifier si la fonction y est solution de l'équation différentielle dans chacun des cas suivants
1. $y" + 2y' + 8\sin 2x = 0$ avec $y = \cos 2x + \sin 2x$
2. $y'' + 2y' + y = 0$ avec $y = 2e^{-x} + xe^x$

Exercice 3
Résoudre les ED linéaires sans second membre d'ordre 1 suivantes

1.$y' - y\cos x = 0$, 2. $\left(1 + x^2\right)y' + xy = 0$, 3.$y' - y\arctan x = 0$, 4. $y'\sqrt{1 - x^2} - xy = 0$

Exercice 4
On considère l'équation différentielle d'ordre 1 suivante : $y' - y = f(x)$ (1)
1. Trouver une solution particulière de (1) pour les cas suivants

$$f(x) = x^2 + x + 1,\ f(x) = 3e^{2x},\ f(x) = 2\cos 3x \text{ et } f(x) = x^2 + x + 1 + 3e^{2x} + 2\cos 3x$$

2. Déduire la solution générale de (1) pour chacun des cas ci-dessus.

Exercice 5
1. En utilisant la méthode de variation de la constante, résoudre les équations différentielles suivantes

$$(1)\ \left(1 - x^2\right)y' + 2xy = 4x \qquad (2)\ y' + 2y = \tan x\ e^{-2x} \qquad (3)\ y' + y = \cos 2x \qquad \text{(E)}$$

2. Trouver la solution de (1) qui vérifie $y\left(\sqrt{3}\right) = 2$.

Exercice 6
1. Trouver une solution particulière pour chacune des équations différentielles d'ordre 2 suivantes

$$(1)\ y'' - 3y' + 2y = 8 \quad (2)\ y'' - 4y' + 4y = x^2 + x + 1 \quad (3)\ y'' + 9y = 2e^{-2x} \qquad (1)$$

2. Déduire la solution générale de chacune des ED ci-dessus.
3. Trouver la solution de (2) qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(-1) = 2$

Exercice 7
En utilisant la méthode de variation de la constante, résoudre les équations différentielles de l'exercice 6.

Université Ferhat Abbas (Sétif1)
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année Universitaire 20015/2016
LMD Science de la Matière
$1^{ère}$ Année Maths2

Série de TD n°8

Matrices et Déterminants

Exercice 1
Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer $A+B$, $B-C$, $3A$, $4B$, $2C$ et $3A-4B+2C$.

Exercice 2
1. Déterminer $A = (a_{ij})$ la matrice carrée d'ordre 3 telle que pour tout $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$, $a_{ij} = 2i - j$.
2. Donner une matrice dont la transposée est égale à son opposée.

Exercice 3
1. Effectuer les produits possibles des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $A(\theta)A(\theta')$ et $(A(\theta))^2$.

Exercice 4
Calculer les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 5
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
1. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.
2. Calculer B^{-1} par la méthode de la matrice adjointe.
3. Calculer C^{-1} par la méthode de Gauss Jordan.