Université de Sétif1 **2018 / 2019**
Faculté Des sciences
Département MI **Pr A.MEROUANI**
1ère Année MI (s1)

Module : Algèbre 1

Correction (EXAMEN DE RATTRAPAGE)

EXERCICE 1

1- Sur l'ensemble$\mathbb{R}$. On considère la relation binaire $\mathfrak{R}$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\, \mathfrak{R}\, y \Leftrightarrow\ cos^2 x + sin^2 y = 1$$

1- $\mathfrak{R}$**est Reflexive** (ie $\forall x \in \mathbb{R} : x\, \mathcal{F}\, x$) (1)

On a $\forall x \in \mathbb{R} :\ cos^2 x + sin^2 x = 1\,, dou\ x\, \mathfrak{R}\, x$

2- $\mathfrak{R}$ **est symétrique** (ie $\forall x, y \in \mathbb{R} : x\, \mathfrak{R}\, y \quad \Rightarrow y\, \mathfrak{R}\, x$) (1)

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : On\ a\ x\, \mathfrak{R}\, y \Leftrightarrow cos^2 x + sin^2 y = 1$$

On sait que $cos^2 x + sin^2 x = 1\ et\ cos^2 y + sin^2 y = 1$ donc

$$cos^2 x + sin^2 x + \ cos^2 y + sin^2 y = 2$$

$$\Rightarrow cos^2 x + sin^2 y + \ cos^2 y + sin^2 x = 2$$

$$\Rightarrow 1 + \ cos^2 y + sin^2 x = 2$$

$$\Rightarrow cos^2 y + sin^2 x = 1$$

$$\Rightarrow y\, \mathfrak{R}\, x$$

3- $\mathfrak{R}$ **est transitive** (ie $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x\, \mathfrak{R}\, y\ et\ y\mathfrak{R}z \quad \Rightarrow x\, \mathfrak{R}\, z$) (1)

$$x\, \mathfrak{R}\, y \Leftrightarrow cos^2 x + sin^2 y = 1 \text{..(a)}$$

$$y\, \mathfrak{R}z \Leftrightarrow cos^2 y + sin^2 z = 1 \text{ ...(b)}$$

En additionnant ces deux égalité on trouve $cos^2 x + sin^2 y + cos^2 y + sin^2 z = 2$

donc $cos^2 x + sin^2 y + cos^2 y + sin^2 z = 2\ on\ a\ sin^2 y + cos^2 y = 1\ donc$

$$cos^2 x + sin^2 z = 2 - 1 \Rightarrow cos^2 x + sin^2 z = 1$$

d'où $x\,\Re\,z$

finalement $\Re$ ***est une relation d'équivalence*** **sur** $\mathbb{R}$

2-Soit $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ une relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\forall a,b \in \mathbb{N}^* \;: a\,\mathcal{F}b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : \quad b = \mathrm{a}^k$$

1- $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ **est Reflexive** (ie $\forall a \in \mathbb{N}^* : a\,\mathcal{F}\,a$) **(1)**

On a $\forall a \in \mathbb{N}^* : \exists k = 1 \in \mathbb{N}^* : \quad a = a^k \,, a = a^1 \,, dou\; a\,\mathcal{F}\,a$

2- $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ **est anti- symétrique** (ie $\forall a,b \in \mathbb{N}^* \;: a\,\mathcal{F}b \quad et\; b\,\mathcal{F}\,a \Rightarrow a = b$) **(1)**

$$\forall a,b \in \mathbb{N}^* \;: a\,\mathcal{F}b \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^* : \quad b = \mathrm{a}^{k_1}$$

$$\begin{cases} a\,\mathcal{F}b \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^* : \quad b = \mathrm{a}^{k_1} \; (i) \\ b\,\mathcal{F}a \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}^* : \; a = \mathrm{b}^{k_2} (\mathrm{ii}) \end{cases}$$

En remplacant (i) dans (ii) on obtient $a = \mathrm{a}^{{k_1}^{k_2}} = \mathrm{a}^{k_2 k_1} \quad \Rightarrow k_2 k_1 = 1 \Rightarrow k_2 = k_1 = 1$

$$\Rightarrow a = b$$

3- $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ **est transitive** (ie $\forall a,b \in \mathbb{N}^* \;: a\,\mathcal{F}b \quad et\; b\,\mathcal{F}\,c \Rightarrow a\,\mathcal{F}c$) **(1)**

$$\begin{cases} a\,\mathcal{F}b \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^* : \quad b = \mathrm{a}^{k_1} \; (i) \\ b\,\mathcal{F}c \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}^* : \; c = \mathrm{b}^{k_2} (\mathrm{ii}) \end{cases}$$

$$a = \mathrm{c}^{{k_1}^{k_2}} = \mathrm{c}^{k_2 k_1} \quad \text{donc } \exists k = k_2 k_1 \in \mathbb{N}^* : \; c = \mathrm{a}^k$$

d'où $a\,\mathcal{F}c$

finalement $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ ***est une relation d'équivalence*** **sur** $\mathbb{N}^*$

on remarque que

$\forall k \in \mathbb{N}^* : \; 2 \neq 3^k$et $\forall k \in \mathbb{N}^* : \; 3 \neq 2^k$donc $2 \not\mathfrak{F} \mathbf{3}$ **(1)**

$\exists a,b \in \mathbb{N}^* \;: a \not\mathfrak{F} b \; et b \not\mathfrak{F} a \qquad (a = 2 \; et \; b = 3 \;)$ **d**ou

L'ordre est partiel

EXERCICE 2 (13)

$*$ est une L C I sur IR(1)

Soient a,b $\in \mathbb{R}$ donc $a+b-ab \in \mathbb{R}$ d'ou $a*b \in \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $b \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \Rightarrow a*b \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ (raisonnement par l'absurde)

en supposant que $a \neq 1$ et $b \neq 1$ et $a*b=1$

On a $a*b=1 \Rightarrow a+b-ab=1 \Rightarrow a+b(1-a)=1 \Rightarrow a-1+b(1-a)=0$

$\Rightarrow (a-1)(1-b)=0 \Rightarrow a=1$ ou $b=1$ Nous obtenons une contradiction.

1- $*$commutative $\forall a,b \in \mathbb{R}\setminus\{1\} a*b=b*a$(0.5)

On a $a*b = \Rightarrow a+b-ab = \Rightarrow b+a-ba = b*a$

2- $*$ associative

$(a*b)*c = a*(b*c) = a+b+c-ab-ac-cb+abc$ (1)

3- l'element neutre (e) $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ $a*e=e*a=a$ (1)

Soit $a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ an a $a*e=a \Rightarrow \Rightarrow a+e-ae=a \Rightarrow a+e-ae-a=0 \Rightarrow$

$e-ae=0 \Rightarrow e(1-a)=0 \Rightarrow$ **e=0** $(a \neq 1)$

4- l'élement symétrique $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \exists a \in \acute{\mathbb{R}}\setminus\{1\}$ $a*\acute{a}=\acute{a}*a=e$ (1)

$a*\acute{a}=e \Rightarrow a*\acute{a}=0 \Rightarrow a+\acute{a}-a\acute{a}=0 \Rightarrow \acute{a}-a\acute{a}=-a \Rightarrow \acute{a}(1-a)=-a$

$\Rightarrow \acute{a}=\frac{-a}{1-a} \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$,

Finalement $(\mathbb{R}\setminus\{1\}.*)$ est un group commutatif

b- On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne ° définie par :

$$\forall x,y \in \mathbb{R} : x \circ y = \sqrt[5]{x^5+y^5}$$

°commutative $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $x \circ y = y \circ x$

$\forall x,y \in \mathbb{R} : x \circ y = \sqrt[5]{x^5+y^5} = \sqrt[5]{y^5+x^5} = y \circ x$ **(0.5)**

° associative (1)

$(x°y\,)\,°z=(\sqrt[5]{x^5+y^5})°z = \sqrt[5]{\sqrt[5]{x^5+y^5}^5+z^5}=\sqrt[5]{x^5+y^5+z^5}$

$x°(y\ \ °z)= x°(\sqrt[5]{y^5+z^5}) =\sqrt[5]{x^5+\sqrt[5]{y^5+z^5}^5}=\sqrt[5]{x^5+y^5+z^5}$ d'ou° associative

- **l'element neutre (e)** $\forall x\in\mathbb{R}\ x*e= e*x=x$ **(1)**

Soit $x\in\mathbb{R}$ an a $x*e=a$ $\Rightarrow \sqrt[5]{x^5+e^5}=x \Rightarrow x^5+e^5 =x^5 \Rightarrow e^5 =x^5$

$\Rightarrow$ **e=0**

l'élement symétrique $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, \acute{x} \in \mathbb{R}\ \ x * \acute{x} = \acute{x} * x = e$ **(1)**

$x * \acute{x}=e \Rightarrow \Rightarrow \sqrt[5]{x^5+\acute{x}^5} =0 \Rightarrow x^5+\acute{x}^5=0 \Rightarrow x^5=-\acute{x}^5 \Rightarrow (x)^5=(-\acute{x})^5$

$\Rightarrow \acute{x}=-x\in\mathbb{R}$

Finalement ($\mathbb{R}$.°) est un group commutatif

l'application $f(x)=x^5$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},°)$ dans $(\mathbb{R},+)$(2)

$\forall x,y\in\mathbb{R}$: $f(x°y)=f\left(\sqrt[5]{x^5+y^5}\right)=(\sqrt[5]{x^5+y^5})^5=x^5+y^5=f(x)+f(y)$ d'où f est un homomorphisme de $(\mathbb{R},°)$ dans $(\mathbb{R},+)$

c- f est injective $\Rightarrow$ Ker f={e }

Supposons que f soit injective, et montrons que Ker f={e } **(1.5)**

On a $\forall x\in \mathrm{Ker}\, f$ $\quad f(x)=\acute{e} \xRightarrow[f\,(e)=\acute{e}]{} f(x)=f(e) \xRightarrow[f\ injective]{} x=e$ donc Ker f={e }

Ker f={e } $\Rightarrow$ f est injective (1.5)

$\forall x,y\in \mathrm{E}\ \ f(x)=f(y)\Rightarrow f(x)°f(y)^{-1}=\acute{e} \xRightarrow[f(y^{-1})=f(y)^{-1}]{} f(x)°f(y^{-1})=\acute{e} \xRightarrow[f\ hom]{} f(x\,\square y^{-1})=\acute{e}$

$\Rightarrow$

$x\square y^{-1}\in$Ker $f \xRightarrow[\mathrm{Ker}\ f=\{e\ \}]{} x\square y^{-1}=e \Rightarrow x=y \Rightarrow f$ est injective