

Examen de rattrapage d'Analyse 1

Exercice 1: (10 points)

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^\alpha \sin \frac{1}{x}}{1 - \cos x}$$

où $\alpha \in \mathbf{R}$; ($\alpha \geq 2$); $x \in [-\pi, \pi]$.

- 1°) Déterminer le domaine de définition de f
- 2°) Etudier le prolongement par continuité de f en 0 suivant la valeur de α .

Exercice 2: (10 points)

On donne la suite (u_n) définie par:

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n}; \quad u_0 \in \mathbf{R}^*$$

- 1°) Calculer u_n pour $u_0 = 1$.
- 2°) Calculer u_n pour $u_0 = -1$.
- 3°) Pour $u_0^2 \neq 1$. Montrer que $\forall n \geq 1$ on a:
 $u_{2n} = u_0$ et $u_{2n-1} = \frac{1}{u_0}$
- 4°) Résoudre l'équation $u_0 = \frac{1}{u_0}$.
- 5°) Déduire la nature de la suite (u_n) selon u_0 .

Bonne Chance et bonnes vacances!

Solution exercice 1:

$$f(x) = \frac{x^\alpha \sin 1/x}{1 - \cos x} \quad \left(\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ \alpha \geq 2 \end{array} \right)$$

1°) Domaine de définition:

f est définie si $1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2k\pi ; (k \in \mathbb{Z})$

$x \neq 0$ où $x \in [-\pi, \pi]$

donc $D_f = [-\pi, \pi] - \{0\}$

2pts

2°) On étudie le prolongement par continuité on étudie

calcul:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \sin 1/x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \sin 1/x}{2 \sin^2 x/2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \sin 1/x}{2 \cdot x^2/4} \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0}} \right\} \underline{\underline{2pts}}$$

(Car $\sin x \approx x$) $= \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-2} \sin 1/x$

•) $\alpha = 2$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin 1/x \nexists \leftarrow \underline{\underline{2pts}}$

•) $\alpha > 2$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-2} \sin 1/x = 0 \rightarrow \underline{\underline{2pts}}$

alors on peut prolonger par continuité la fonction f dans le cas cas $\alpha > 2$ et ceci en posant $f(0) = 0$

2pts

Correction détaillée et barème

$$I) u_{n+1} = \frac{1}{u_n} \quad u_0 \in \mathbb{R}.$$

$$1^\circ / u_0 = 1 \Rightarrow u_1 = 1 \Rightarrow u_2 = 1 \Rightarrow u_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1 \text{ pt})$$

$$2^\circ / u_0 = -1 \Rightarrow u_1 = -1 \Rightarrow u_2 = -1 \Rightarrow u_n = -1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1 \text{ pt})$$

3° / Si $u_0^2 \neq 1$. On a :

$$\textcircled{0,5} u_1 = \frac{1}{u_0} \text{ et } u_2 = \frac{1}{u_1} = u_0 \quad \textcircled{0,5}$$

$$\text{Supposons } u_{2n} = u_0 \Rightarrow u_{2n+2} = \frac{1}{u_{2n+1}} = u_{2n} = u_0 \quad (1,5)$$

$$\text{Supposons } u_{2n+1} = \frac{1}{u_0} \Rightarrow u_{2n+3} = \frac{1}{u_{2n+2}} = \frac{1}{u_0} \quad (1,5)$$

$$\text{Dnc } \forall n \geq 1 \text{ ma: } u_{2n} = u_0 \text{ et } u_{2n-1} = \frac{1}{u_0}$$

$$4^\circ / u_0 = \frac{1}{u_0} \Rightarrow u_0^2 = 1 \Rightarrow u_0 = \pm 1 \quad (1 \text{ pt})$$

$$5^\circ / \text{Si } u_0 = 1 \Rightarrow u_n = 1 \Rightarrow (u_n) \text{ converge vers } 1. \quad (1 \text{ pt})$$

$$\text{Si } u_0 = -1 \Rightarrow u_n = -1 \Rightarrow (u_n) \text{ converge vers } -1. \quad (1 \text{ pt})$$

$$\text{Si } u_0^2 \neq 1 \Rightarrow u_{2n} \rightarrow u_0 \text{ et } u_{2n+1} \rightarrow \frac{1}{u_0} \text{ et}$$

$$u_0 \neq \frac{1}{u_0} \text{ dnc la suite } (u_n) \text{ diverge} \quad (1 \text{ pt})$$